Обоснование макромоделей властных иерархий через их микроописание

А.П. Михайлов, А.В. Савельев

Институт математического моделирования РАН
Московский физико-технический институт
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 97-01-00339

Аннотация

В данной работе, являющейся продолжением исследований по математическому моделированию систем "власть-общество" [1,2,7,8], предложена модель иерархии, трактуемой как "древо" (или "пирамида"). Такая топология более близка к строению реальных иерархий, чем применявшееся ранее представление властной структуры в виде "цепочки" следующих друг за другом элементов. При соответствующих допущениях и агрегировании микроописание переходит в уже построенное макроописание, когда рассматривается не каждая инстанция в отдельности, а их объединения - иерархические "слои", характеризуемые некоторыми "средними" инстанциями. Тем самым, для первоначальных, упрощенных моделей властных структур получено обоснование и обобщение.

Abstract

This paper is a continuation of researches on mathematical modeling of "power — society" systems [1,2,7,8]. Here a model of power hierarchy considering as a "tree" (or a "pyramid") is built. The topology of this kind is more close to real power structures constructions, than early models of hierarchies considered as a simple chain of institutions. Under some assumptions and after aggregate this microdescription transforms to yet built macrodscription for some "average" institutions. Thus a proof and a generalization for initial simplified models of power structures is obtained.

§ 1. Топология иерархии и "властные" характеристики ее элементов.

1. Строение типичных иерархий. Властные структуры (в дальнейшем для определенности будем говорить о государственных властных структурах, наделенных соответствующими полномочиями согласно законодательству) или иерархии имеют, вообще говоря, весьма сложную топологию. Например, некоторые элементы (инстанции, институты) иерархии могут быть в непосредственном подчинении у нескольких функционально разных начальников (начальник медицинской службы полка подчиняется как его командиру, так и — по чисто медицинской линии — соответствующему дивизионному чину), число уровней в функционально разных цепочках иерархии может быть различным (в вооруженных силах уровень ответственности за финансы обычно не ниже батальонного, а в боевых подразделениях низший уровень отвечает рядовому солдату), у разных начальников может быть разное число непосредственных подчиненных (у командира роты — единицы, у командира отделения — десятки) и т.д. Однако общими для конструкций всех иерархий являются, очевидно, следующие незыблемые принципы:

1) Иерархия разбита по старшинству на "горизонтальные" уровни (иерархические слои), каждый из которых состоит из номинально равных между собой институтов (хотя это равенство зачастую бывает чисто формальным). Каждый уровень содержит не менее одной инстанции, каждая инстанция приписана к определенному слою;

2) Любой из элементов иерархии имеет хотя бы одного начальника (кроме высших инстанций) и может иметь подчиненных (кроме низших инстанций);

3) Порядок подчиненности "по вертикали" в иерархии определен, т.е. для любого института определены все его прямые начальники — непосредственные (ближайшие) руководители и другие руководящие им инстанции, а также все его непосредственные и остальные подчиненные. Другими словами, рассматриваемая по вертикали властная структура состоит из совокупности иерархических цепочек, содержащих не более одной инстанции в каждом слое. Цепочки между собой не тождественны, но разные цепочки могут частично состоять из одних и тех же институтов иерархии;

4) Старшие по иерархии имеют право отдавать младшим приказы для исполнения, но не наоборот (тем самым во властных структурах невозможен, например, феномен цикличности, встречающийся в некоторых биологических иерархиях). Заметим, что деятельность инстанции не всегда сводится лишь к выполнению приказов сверху, поскольку у нее есть "автономный" круг обязанностей, определяемых "должностной инструкцией", для исполнения которых прямые приказы необязательны.

Простая графическая иллюстрация свойств 1)–4) приведена на рис. 1. Здесь кружочками обозначены инстанции разного уровня (нулевой — высший, N-тый — низший), стрелки указывают направление подчиненности (направленность приказов), разным римским цифрам отвечают иерархические цепочки с разными свойствами (очевидно, что разнообразие цепочек не ограничивается приведенными примерами).

Для иерархии естественно ввести вертикальную координату i, $0 \leq i \leq N$, описывающую принадлежность инстанции к одному из $N+1$ иерархических слоев (номера 0, N отвечают высшему и низшему слою соответственно) и горизонтальную координату j, $1 \leq j \leq n(i)$, описывающую положение инстанции в иерархическом слое с номером i, содержащем $n(i)$ властных институтов (нумерация инстанций по координате j может осуществляться, разным образом, в том числе и чисто формально). Задание пары i, j однозначно определяет положение инстанции во властной структуре.

В дальнейшем, чтобы не загромождать рассмотрение математическим формализмом, ограничимся весьма широким и реально существующим классом иерархий, состоящих лишь из "регулярных" цепочек (пример — цепочка I на рис. 1). В них у любой инстанции имеется лишь один непосредственный начальник (нет кратной подчиненности) и присутствуют элементы, отвечающие всем иерархическим слоям. Если, как это обычно и бывает, у каждого начальника более одного непосредственного подчиненного, то графически такие иерархии можно уподобить пирамиде или дереву с расширяющейся кроной (см. рис. 2 с примером фрагмента характерной для некоторых родов войск "триплетной" иерархии).

Функция $n(i)$, обладающая свойствами $n(0) \geq 1$, $n(i+1) \geq n(i)$, характеризует расходимость (дивергентность) иерархии, вообще говоря, разную для разных слоев. Например, в случаях $n(i) = i^2 + a$, $a \geq 1$ — целое число; $n(i) = am^i$, $a \geq 1$, $m > 1$ — целые числа; $n(i) = a + i$, локальная дивергентность $\nu(i) = n(i+1)/n(i)$ соответственно возрастает, не меняется и убывает с ростом координаты i. Общее число инстанций в иерархии дается очевидной формулой

$$N_0 = \sum_{i=0}^{N} n(i) \tag{1}$$

При $\nu_i \equiv 1$ иерархия состоит из единственной цепочки, а простейшей иерархии "начальник — подчиненный" отвечают пары (0, 1), (1, 1).

2. Властные полномочия и фактическая власть элементов иерархии. Эти понятия достаточно подробно обсуждались применительно к цепочечной иерархии ($\nu(i) \equiv 1$) в работах [1, 2] (см. также [7, 8]). Поэтому здесь ограничимся лишь необходимым для дальнейшего изложения краткими пояснениями.

"Вес" (значимость) каждой инстанции в иерархии определяется "объемом" властных полномочий, которыми она наделена по законам (правилам, инструкциям и т.д.). Границы этого объема — минимальные и максимальные полномочия института власти. Минимальные полномочия — это действия, которые инстанция предпринимает всегда. Например, налоговая инспекция обязана обработать поданные декларации о доходах и взыскать, в случае неуплаты налогов, соответствующие штрафы. Максимальные властные полномочия — действия, предпринимаемые инстанцией, в основном, при исключительных обстоятельствах, скажем, решение суда о применении высшей меры наказания к преступнику. Другими словами минимальные полномочия — нижний предел обязанностей, а максимальные полномочия — верхний предел возможностей инстанции.

В модели минимальные и максимальные полномочия описываются заданными положительными функциями $p_1(i,j,t) > 0$, $p_2(i,j,t) > 0$, $0 \le i \le N$, $0 \le j \le n(i)$, $t \ge t_0$, зависящими, вообще говоря, от времени и обладающими очевидным свойством:

$$p_2(i,j,t) > p_1(i,j,t) \quad 0 \le i \le N, \quad 1 \le j \le n(i), \quad t \ge t_0. \tag{2}$$

Другое свойство функций p_1, p_2 — их монотонное убывание с ростом координаты i для инстанций из одной иерархической цепочки (состоящей, напомним, из следующих друг за другом непосредственных начальников и подчиненных):

$$\begin{aligned} &p_1(i^*,j,t) > p_1(i^*+1,j^*,t),\\ &p_2(i^*,j,t) > p_2(i^*+1,j^*,t),\\ &0 \le i^* \le N-1; \quad j^* \in J(i^*,i^*+1,j). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь обозначения i^*, i^*+1 символизируют принадлежность инстанций к одной иерархической цепочке, а обозначение j^* — принадлежность инстанции ко множеству $J(i^*,i^*+1,j)$ всех непосредственных подчиненных института с координатами (i^*,j). Если же инстанции не входят в одну иерархическую цепочку, то у инстанции с меньшим номером i властные полномочия необязательно больше, чем у более младшего звена из другой цепочки.

Среднюю весомость $\bar{p}_{1,2}(i,j,t)$ института (i,j) в иерархии можно определять разными способами, наиболее простой из которых дается формулой

$$\bar{p}_{1,2}(i,j,t) \;=\; \frac{1}{2}\left(p_1(i,j,t) \;+\; p_2(i,j,t)\right). \tag{4}$$

Средние полномочия $\bar{p}_1(i,t)$, $\bar{p}_2(i,t)$, приходящиеся на одного чиновника из слоя, и средние полномочия всего иерархического слоя с номером i определяются, соответственно, выражениями $\bar{p}_1(i,t) \;=\; \sum\limits_{j=1}^{n(i)} p_1(i,j,t)\,/\,n(i)$, $\bar{p}_2(i,t) \;=\; \sum\limits_{j=1}^{n(i)} p_2(i,j,t)\,/\,n(i)$ и

$$\bar{p}_{1,2}(i,t) \;=\; \sum_{j=1}^{n(i)} \bar{p}_{1,2}(i,j,t), \tag{5}$$

а средние полномочия всей иерархии (доступный, в согласии с законодательством, к ее распоряжению "властный резервуар") формулой

$$\bar{P}_{1,2}(t) \;=\; \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{n(i)} \bar{p}_{1,2}(i,j,t) \;=\; \sum_{i=0}^{N} \bar{p}_{1,2}(i,t). \tag{6}$$

Функция $\bar{p}_{1,2}(i,t)$, очевидно, удовлетворяет следующему из (3)–(5) естественному для иерархии неравенству

$$\bar{p}_{1,2}(i,t) > \bar{p}_{1,2}(i+1,t), \quad 0 \le i \le N-1, \tag{7}$$

а функции $p_1(i,t) = \sum_{j=1}^{n(i)} p_1(i,j,t)$, $p_2(i,t) = \sum_{j=1}^{n(i)} p_2(i,j,t)$ таким же (см.(2), (3)) естественным неравенствам

$$\begin{aligned} & p_2(i,t) > p_1(i,t), \quad 0 \le i \le N, \\ & p_1(i,t) > p_1(i+1,t), \quad p_2(i,t) > p_2(i+1,t), \quad 0 \le i \le N-1. \end{aligned} \tag{8}$$

Поясним, что здесь мы не ставим вопрос о количественном измерении властных полномочий и о соотношениях между полномочиями начальников и подчиненных в иерархии (для целей данной работы достаточно выполнения приведенных выше неравенств (2), (3)).

Проблема "властометрии" для реальных иерархий — отдельная интересная и трудная тема. Впрочем, если говорить об относительных весах инстанций, то во многих случаях этот вопрос решается вполне точно. Примерами служат пришедшие из древности соотношения в иерархии шахматных фигур, результаты "дележки" властных полномочий между победившими на выборах в Госдуму РФ – 95 политическими силами (по сообщению СМИ одно кресло вице-спикера приравнивалось к четырем креслам председателей комитетов) и в Госдуму РФ – 99 [5], экспертная оценка вице-спикера Госдумы РФ – 95 В. Рыжкова о том, что в России 85–90% власти принадлежит исполнительным органам, а 10–15% власти принадлежит законодательным органам [6] и др.

Кроме властных полномочий, определяемых для каждой инстанции заранее (входные данные) состояние элемента иерархии характеризуется *величиной власти* $p(i,j,t) \ge 0$, $0 \le i \le N$, $1 \le j \le n(i)$ — *фактическим осуществляемым уровнем властного влияния данной инстанции в данный момент времени* на своих партнеров по системе "власть — общество". Этот уровень, как правило, не всегда и не всюду совпадает с максимальными (либо минимальными) полномочиями и является, в отличие от них, неизвестной заранее, *искомой функцией (распределением власти)*, для нахождения которой и строится модель. Более подробно понятия властных полномочий и фактического уровня власти обсуждались в [1, 2] (при этом предполагалась *Законопослушность* рассматриваемой системы).

Если функция $p(i,j,t)$ найдена, то нетрудно (по схожим с (5)–(8)) формулам определить уровень власти, реализуемый i–тым слоем структуры

$$p(i,t) = \sum_{j=1}^{n(i)} p(i,j,t), \quad 0 \le i \le N, \tag{9}$$

полную фактическую власть иерархии

$$P(t) \;=\; \sum_{i=0}^{N} p(i,t) \;=\; \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{n(i)} p(i,j,t), \tag{10}$$

среднюю (на одного чиновника) власть в i–том слое

$$\bar{p}(i,t) \;=\; \frac{p(i,t)}{n(i)} \;=\; \frac{\sum_{j=1}^{n(i)} p(i,j,t)}{n(i)} \tag{11}$$

и среднюю власть одного чиновника (см. (1)) в иерархии

$$\bar{p}(t) \;=\; P(t) \,/\, \sum_{i=0}^{N} n(i) \;=\; P(t)/N_0. \tag{12}$$

§ 2. Отношения инстанций иерархии между собой и с гражданским обществом.

Для цепочечной иерархии эти отношения достаточно детально рассматривались в [1, 2]. Здесь мы их, фактически, кратко повторим, но уже применительно к иерархическому древу.

1. Отношения внутри иерархии. Рассмотрим сначала иерархические взаимодействия между начальниками, отдающими приказы – поручения, и подчиненными, принимающими их к исполнению. Пришедший сверху приказ приносит получающему его нижнему звену некоторую порцию власти, дополнительную к той, которую он осуществлял в данный момент "по собственной инициативе", т.е. в соответствии со своим пониманием того как должны реализовываться отпущенные ему властные полномочия (должностная инструкция). Имеются в виду, конечно же, распоряжения, сопровождаемые передачей соответствующих ресурсов, а не встречающиеся в действиях инстанций приказы – "пустышки". В свою очередь, отдавший приказ начальник, утрачивает непосредственный контроль за исполнением поручения и, тем самым, переданную подчиненному порцию власти. При этом в иерархии происходит перераспределение фактической власти, некоторая ее часть и связанные с нею финансовые, информационные и другие ресурсы "перемещаются" по структуре, формируя *поток власти* — количество власти получаемое (отдаваемое) инстанцией в единицу времени.

Общее описание этих отношений дается иерархическим **Постулатом**:

Внутри иерархии порции власти могут передаваться лишь из мест с большим текущим уровнем власти в места с меньшим текущим уровнем власти (и скорость передачи тем больше, чем больше разница в уровнях власти).

Рассматриваются два основных механизма передачи власти внутри иерархии. Первых из них — "приказы по команде" (*близкодействие*), отвечающий непосредственному взаимодействию между инстанциями (i^*, j) и (i^*+1, j^*), т.е. между начальником и любым из его непосредственных подчиненных. Соответствующий поток власти обозначим через $W(i^*, j, i^*+1, j^*, t)$. Математическая реализация Постулата в этом случае дается выражением

$$
\begin{aligned}
& W(i^*, j, i^*+1, j^*, t) \; = \\
& = \; k\left(i^*, j, i^*+1, j^*, t, p(i^*, j, t), p(i^*+1, j^*, t), [p(i^*, j, t) - p(i^*+1, j^*, t)], \ldots\right) \cdot \\
& \cdot \left[p(i^*, j, t) - p(i^*+1, j^*, t)\right], \\
& 0 \le i^* \le N-1, \quad j^* \in J(i^*, i^*+1, j)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

и в частности означает, что

$$
W(i^*, j, i^*+1, j^*, t) > 0, \quad W(i^*, j, i^*+1, j^*, t) < 0, \quad W(i^*, j, i^*+1, j^*, t) = 0
$$

при $p(i^*, j, t) > p(i^*+1, j^*, t)$, $p(i^*, j, t) < p(i^*+1, j^*, t)$, $p(i^*, j, t) = p(i^*+1, j^*, t)$, соответственно.

Заметим, что поток $W(i^*, j, i^*+1, j^*, t)$ считается пропорциональным как *относительной разнице* уровней власти начальника и подчиненного, т.е.

$$
W(i^*, j, i^*+1, j^*, t) \; \sim \; \left(p(i^*, j, t) - p(i^*+1, j^*, t)\right) / p(i^*, j, t)
$$

так и самому *уровню власти* начальника, т.е.

$$
W(i^*, j, i^*+1, j^*, t) \; \sim \; p(i^*, j, t).
$$

Комбинация этих двух естественных предположений дает формулу (13), в которой функция $k > 0$ характеризует меру *"безответственности"* начальника — чем больше значение k, тем терпимее (при прочих равных условиях) начальник относится к выравниванию своего уровня власти с властью данного подчиненного.

Второй механизм передачи власти в иерархии — "приказы через голову", отвечающие взаимодействию между не непосредственными начальниками и подчиненными (*дальнодействие*).

Соответствующий поток власти от инстанции $(i^* - q, j)$ к институту $(i^* + 1, j^{**})$, обозначаемый как

$$
V(i^* - q, j, i^*+1, j^{**}, t), \quad 0 < i^* \le N-1, \quad 1 \le q \le i^*, \quad j^{**} \in J(i^* - q, i^*+1, j),
$$

где $J(i^* - q, i^*+1, j)$ — множество институтов из слоя i^*+1, подчиненных институту $(i^* - q, j)$, $1 \le q \le i^*$ дается сходным с 13 выражением, полученным при аналогичных предположениях:

$$
\begin{aligned}
&V(i^* - q, j, i^* + 1, j^{**}, t) \; = \\
&= \; \chi\,(i^* - q, j, i^* + 1, j^{**}, t, p(i^* - q, j, t), p(i^* + 1, j^{**}, t), \\
&[p(i^* - q, j, t) - p(i^* + 1, j^{**}, t)]\,, \ldots) \,\cdot \\
&\cdot\, [p(i^* - q, j, t) - p(i^* + 1, j^{**}, t)]\,, \quad 1 \le q \le i^*,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где поведенческая характеристика $\chi \geq 0$ как и функция k описывает меру безответственности начальника (но уже по отношению к не непосредственному подчиненному).

2. Взаимодействие иерархии и гражданского общества. Властная иерархия существует не сама по себе, а как часть системы "власть – общество". Поэтому кроме внутрииерархических взаимодействий необходимо рассмотреть также взаимодействие инстанций с гражданским обществом. Под последним понимается часть рассматриваемой системы, непосредственно не обладающая государственной властью, т.е. не имеющая официальную возможность принуждать партнеров к тому или иному поведению (частные лица, семьи, негосударственные институты типа церкви в неконфессиональных обществах и т.п.).

Однако гражданское общество наделено правом выражать свое отношение к тем или иным действиям элементов иерархии, осуществляемых ими в тот или иной момент времени. Это реакция общества сказывается на действиях инстанций, заставляя их либо черпать из "конституционного резервуара" дополнительные порции власти, либо возвращать в него часть фактически осуществляемой власти, если ее уровень, по мнению общества, превышает необходимый (под конституционным резервуаром понимается вся законодательная, нормативная и т.д. база, которой располагают органы государственной власти всех уровней для осуществления своих функций).

Другими словами, в модели предполагается, что *знак и величина обмена властью между иерархией и Конституцией* (и, опосредствованно между иерархией и гражданским обществом — учредителем Конституции) *зависит от реакции гражданского общества.* Считается, что эта реакция — известная заданная функция

$$
\mathcal{F}_S \; = \; \mathcal{F}_S\,(i, j, t, p(i, j, t), p_1(i, j, t), p_2(i, j, t))\,, \tag{15}
$$

зависящая от уже введенных ранее аргументов. По своему смыслу функция $\mathcal{F}_S$ (интенсивность *реакции общества*) определяет, на какую величину должен быть повышен (понижен), по мнению общества, текущий уровень $p(i, j, t)$ власти инстанции с координатами i, j в единицу времени.

Конечно же, элементы властной иерархии могут не полностью учитывать мнение гражданского общества, поэтому реальное повышение (понижение) уровня их власти в результате взаимодействия с гражданским обществом зависит также от *восприимчивости* иерархии, т.е. ее склонности учитывать реакцию общества:

$$I_{H,S} = I_{H,S}\left(i,j,t,p(i,j,t),p_1(i,j,t),p_2(i,j,t)\right), \tag{16}$$

где задаваемая функция $I_{H,S}$ зависит от тех же аргументов, что и $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ (при $I_{H,S} \equiv 1$ реакция общества учитывается иерархией полностью, без искажений).

Наконец, помимо функций $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ и $I_{H,S}$ в модель вводится еще одна поведенческая характеристика — "*властолюбие*" инстанций

$$\mathcal{F}_H = \mathcal{F}_H\left(i,j,t,p(i,j,t),p_1(i,j,t),p_2(i,j,t)\right), \tag{17}$$

зависящая от тех же аргументов и определяющая, на какую величину (за единицу времени) инстанция (i,j) желала бы увеличить (уменьшить) уровень своей текущей власти (данная характеристика близка к часто используемому в социологии понятию "вертикальная мобильность"). Случай $I_{H,S} \equiv 1$, $\mathcal{F}_H \equiv 0$ означает, что инстанции безразличен уровень осуществляемой ею власти и он определяется лишь ее партнерами по системе.

Сумму величин $I_{H,S} \cdot \mathcal{F}_S$ и $\mathcal{F}_H$ т.е. функцию $\mathcal{F} = I_{H,S} \cdot \mathcal{F}_S + \mathcal{F}_H$, будем называть *реакцией системы.*

Заметим, что введенные поведенческие характеристики могут, вообще говоря, зависеть и от других аргументов, например, индивидуальная безответственность начальника — от характеристик других начальников, локальная реакция общества — от реакции общества на действия соседей по иерархии или от предыстории отношений с данным институтом власти и т. д.

Просуммируем основные предположения, сделанные в §§ 1, 2:

1) Рассматриваются регулярные иерархии;

2) Все партнеры в системе законопослушны;

3) Справедлив иерархический Постулат;

4) Обмен властью между иерархией и Конституцией определяется реакцией системы.

§ 3. Баланс власти в элементе иерархии, суммирование, осреднение и переход к макромодели.

1. Локальный "закон сохранения власти". Возьмем произвольную "внутреннюю" инстанцию иерархии с координатами (i^*+1, j^*), $i^*+1 \neq 0, N$,

$t \geq t_0$ (напомним, обозначение i^* символизирует принадлежность рассматриваемых далее институтов к одной иерархической цепочке, обозначение j^* — принадлежность инстанции к множеству непосредственных подчиненных одного начальника). Подсчитаем, какое количество власти она получает (теряет) за небольшой промежуток времени Δt, в течение которого все характеристики системы можно считать постоянными.

В соответствии с определением потока W (близкодействие — см. (13)) от непосредственной старшей инстанции она получает приращение власти равное величине

$$\begin{aligned} \Delta p_n^+ \ &= \ W(i^*, j, i^*+1, j^*)\Delta t \ = \\ &= \ k(i^*, j, i^*+1, j^*, t, \ldots) \cdot [p(i^*, j, t) - p(i^*+1, j^*, t)]\, \Delta t, \\ & j^* \in J(i^*, i^*+1, j) \end{aligned} \tag{18}$$

и отдает своим непосредственным подчиненным часть власти равную

$$\begin{aligned} \Delta p_n^- \ &= \ \sum_{j_*^*} W(i^*+1, j^*, i^*+2, j_*^*)\Delta t \ = \\ = \ &\sum_{j_*^*} k(i^*+1, j^*, i^*+2, j_*^*, t, \ldots) \cdot [p(i^*+1, j^*, t) - p(i^*+2, j_*^*, t)]\, \Delta t, \\ & j_*^* \in J(i^*+1, i^*+2, j^*), \end{aligned} \tag{19}$$

где суммирование ведется по множеству всех ее непосредственных подчиненных.

Аналогично, благодаря механизму дальнодействия (см. (14)), от своих прямых (но не непосредственных) начальников инстанция получает порцию власти

$$\Delta p_f^+ \ = \ \sum_q V(i^*-q, j, i^*+1, j^{**}=j^*, t)\Delta t, \quad 1 \leq q \leq i^*, \tag{20}$$

и отдает своим прямым (но не непосредственным) подчиненным часть власти

$$\begin{aligned} \Delta p_f^- \ &= \ \sum_l \sum_{j^{**}} V(i^*+1, j^*, i^*+l, j^{**}, t)\Delta t, \\ & j^{**} \in J(i^*+1, i^*+l, j^*), \quad 3 \leq l \leq N - i^*. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь суммирование ведется по всему древу инстанций, подчиненных элементу (i^*+1, j^*), кроме, разумеется, слоя с номером i^*+2.

Наконец, в согласии с Предположением 4 из § 2 власть инстанции изменяется на величину

$$\Delta p_{S,H} = I_{S,H}(i^*+1, j^*, t, \ldots) \cdot \mathcal{F}_S(i^*+1, j^*, t, \ldots)\Delta t, \tag{22}$$

благодаря взаимодействию с гражданским обществом и на величину

$$\Delta p_H = \mathcal{F}_H(i^*+1, j^*, t, \ldots)\Delta t, \tag{23}$$

в силу собственного властолюбия.

Суммируя (с учетом (14)) (18)–(23), получаем для приращения власти в инстанции за время Δt

$$\begin{aligned}
&\Delta p = p(t+\Delta t) - p(t) = \Delta p_n^+ + \Delta p_n^- + \Delta p_f^+ + \Delta p_f^- + \Delta p_{S,H} + \Delta p_H = \\
&= k(i^*, j, i^*+1, j^*, t, p(i^*, j, t), p(i^*+1, j^*, t), \ldots)\cdot \\
&\cdot \left[p(i^*, j, t) - p(i^*+1, j^*, t)\right] \Delta t + \\
&+ \sum_{j_*^*} k(i^*+1, j^*, i^*+2, j_*^*, t, p(i, j^*, t), p(i^*+2, j_*^*, t), \ldots)\cdot \\
&\cdot \left[p(i^*+1, j^*, t) - p(i^*+2, j_*^*, t)\right] \Delta t + \\
&+ \sum_{q} \{\chi(i^*-q, j, i^*+1, j^*, t, p(i^*-q, j, t), p(i^*+1, j^*, t),\ , \ldots)\cdot \\
&\cdot \left[p(i^*-q, j, t) - p(i^*+1, j^*, t)\right]\} \Delta t + \\
&+ \sum_{l} \sum_{j^{**}} \{\chi(i^*+1, j^*, i^*+l, j^{**}, t, p(i^*+1, j^*, t), p(i^*+l, j^{**}, t),\ , \ldots)\cdot \\
&\cdot \left[p(i^*+1, j^*, t) - p(i^*+l, j^{**}, t)\right]\} \Delta t + \\
&+ I_{S,H}(i^*+1, j^*, t, \ldots)\cdot \mathcal{F}_S(i^*+1, j^*, t, \ldots)\Delta t + \mathcal{F}_H(i^*+1, j^*, t, \ldots)\Delta t, \\
&j_*^* \in J(i^*+1, i^*+2, j^*), \quad 1 \le q \le i^*, \\
&j^{**} \in J(i^*+1, i+l, j^*), \quad 3 \le l \le N - i^*.
\end{aligned} \tag{24}$$

Уравнения (24) выражают баланс власти во внутренних элементах иерархии с произвольными координатами (i^*+1, j^*) или *локальный "закон сохранения власти"*, означающий: *скорость изменения уровня власти в инстанции определяется разностью протекающих через нее потоков власти и интенсивностью реакции системы.* Заметим, что данный "закон" имеет место лишь для идеальных законопослушных систем и нарушается, например, в случае коррумпированных иерархий [7, 8]. Напомним также, что, строго говоря, в членах правой части (24) вместо аргумента t должны фигурировать некоторые промежуточные значения времени (между t и $t+\Delta t$), однако при малой величине промежутка Δt данная (в явном виде) форма записи баланса власти вполне корректна.

Система (24) состоит из $N_0 - n(0) - n(N)$ уравнений для N_0 (см. (1)) неизвестных величин $\Delta p(i^* + 1, j^*, t + \Delta t)$. Для их определения во все моменты времени $t \geq t_0$ необходимо задать $n(0)+n(N)$ дополнительных условий (например, $n(0)$ условий на "левой" и $n(N)$ условий на "правой" границе иерархии), а также начальные условия — уровни власти в момент $t = t_0$ во всех инстанциях властной структуры. Вместе с другими входными данными уравнения (24) представляют собой замкнутую (дискретную) модель системы "власть – общество", полученную в предположениях 1)–4) и позволяющую однозначно найти искомую функцию $p(i, j, t)$ — распределение власти в иерархии.

2. Переход к агрегированным характеристикам. Модель (24) служит наиболее детальным микроописанием изучаемой системы, поскольку содержит топологические, "властные" и поведенческие характеристики всех элементов иерархии. При некоторых допущениях она может быть сведена к более простым агрегированным моделям.

Из всех в принципе возможных подходов к такому агрегированию наиболее естественным представляется "послойное" рассмотрение иерархии. Введем

Предположение:

5 Поведенческие характеристики элементов одного слоя иерархии по отношению к своим подчиненным из других слоев (т.е. степени их ответственности — см. (13), (14)) при изменении координаты j близки к линейным функциям от искомых величин $p(i, j, t)$ и слабо изменяются как функции аргументов j, $p_1(i, j, t)$, $p_2(i, j, t)$. Последнее означает, что:

$$k(i^*, j_s, i^* + 1, j_s^*, t, \ldots) \approx k(i^*, j_t, i^* + 1, j_t^*, t, \ldots),$$

$$1 \leq j_s \leq n(i^*), \quad 1 \leq j_t \leq n(i^*), \quad j_s \neq j_t;$$

$$\chi(i^* - q, j_s, i^* + 1, j_s^*, t, \ldots) \approx \chi(i^* - q, j_t, i^* + 1, j_t^*, t, \ldots),$$

$$1 \leq j_s \leq n(i^* - q), \quad 1 \leq j_t \leq n(i^* - q), \quad j_s \neq j_t;$$

$$\chi(i^* + 1, j_s^*, i^* + l, j_s^{**}, t, \ldots) \approx \chi(i^* + 1, j_t^*, i^* + l, j_t^{**}, t, \ldots),$$

$$1 \leq j_s^* \leq n(i^* + 1), \quad 1 \leq j_t^* \leq n(i^* + 1), \quad j_s \neq j_t.$$

Данное Предположение позволяет, в частности, при дальнейшем послойном суммировании приближенно заменять в функциях k, χ аргументы p, p_1, p_2 на $\bar{p}$, $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ — средние по слою величины (см. (5), (11)).

Тогда приращение $\Delta p_n^+(i^* + 1, t) = \sum\limits_{j^*=1}^{j^*=n(i^*+1)} \Delta p_n^+(i^* + 1, j^*, t)$ (сумма первых членов в правой части (24)) после суммирования по всем инстанциям $(i^* + 1)$-

го, а значит и i^*-го слоя, приближенно записывается в виде:

$$
\begin{aligned}
&\Delta p_n^+(i^*+1,t) = \sum_{j^*=1}^{j^*=n(i^*+1)} k(i^*,j,i^*+1,j^*,t,\ldots)\cdot[p(i^*,j,t)-p(i^*+1,j^*,t)]\,\Delta t \approx \\
&\approx k(i^*,i^*+1,t,\ldots)\cdot \sum_{j^*=1}^{j^*=n(i^*+1)} [p(i^*,j,t)-p(i^*+1,j^*,t)]\,\Delta t = \\
&= k(i^*,i^*+1,t,\ldots)\cdot[p(i^*,t)-p(i^*+1,t)]\,\Delta t = \\
&= k(i^*,i^*+1,t,\ldots)\cdot[n(i^*)\bar p(i^*,t)-n(i^*+1)\bar p(i^*+1,t)]\,\Delta t,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

где $p(i^*,t)$, $p(i^*+1,t)$ — уровни власти, реализуемые i^*-м и (i^*+1)-ым слоем иерархии, $\bar p(i^*,t)$, $\bar p(i^*+1,t)$ — средний уровень власти в i^*-м и (i^*+1)-ом слое (см. (9), (11)).

Аналогично для суммы вторых членов в правой части (24) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\Delta p_n^-(i^*+1,t) = \sum_{j^*=1}^{j^*=n(i^*+1)} \sum_{j_*^*} \Delta p_n^-(i^*+1,j^*,j_*^*t) \approx \\
&k(i^*+1,i^*+2,t,\ldots) \sum_{j^*=1}^{j^*=n(i^*+1)} \sum_{j_*^*} [p(i^*+1,j^*,t)-p(i^*+2,j_*^*,t)]\,\Delta t = \\
&= k(i^*+1,i^*+2,t,\ldots)\,[p(i^*+1,t)-p(i^*+2,t)]\,\Delta t = \\
&= k(i^*+1,i^*+2,t,\ldots)\,[n(i^*+1)\bar p(i^*+1,t)-n(i^*+2)\bar p(i^*+2,t)]\,\Delta t.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Так же, основываясь на Предположении 5, проведем сходные преобразования с суммами третьих и четвертых членов в правой части (24):

$$
\begin{aligned}
&\Delta p_f^+(i^*+1,t) = \sum_{j^*=1}^{j^*=n(i^*+1)} \sum_{q} \Delta p_f^+(i^*-q,j,i^*+1,j^*,t) \approx \\
&\approx \sum_q \{\chi(i^*-q,i^*+1,t,\ldots) \sum_{j^*=1}^{j^*=n(i^*+1)} [p(i^*-q,j,t)-p(i^*+1,j^*,t)]\,\Delta t\} = \\
&= \sum_q \chi(i^*-q,i^*+1,t,\ldots)\,[p(i^*-q,t)-p(i^*+1,t)]\,\Delta t = \\
&= \sum_q \chi(i^*-q,i^*+1,t,\ldots)\cdot[n(i^*-q)\bar p(i^*-q,t)-n(i^*+1)\bar p(i^*+1,t)]\,\Delta t.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

$$\Delta p_f^-(i^*+1,t) = \sum_l \sum_{j^{**}=1}^{j^{**}=n(i^*+l)} \Delta p_f^-(i^*+1,j^*,i^*+l,j^{**},t,\ldots) \approx$$

$$\approx \sum_l \chi(i^*+1,i^*+l,t,\ldots) \sum_{j^{**}=1}^{j^{**}=n(i^*+l)} [p(i^*+1,j^*,t) - p(i^*+l,j^{**},t)]\,\Delta t =$$

$$= \sum_l \chi(i^*+1,i^*+l,t,\ldots)\,[p(i^*+1,t) - p(i^*+l,t)]\,\Delta t =$$

$$= \sum_l \chi(i^*+1,i^*+l,t,\ldots)\cdot[n(i^*+1)\bar{p}(i^*+1,t) - n(i^*+l)\bar{p}(i^*+l,t)]\,\Delta t. \tag{28}$$

При суммировании пятых и шестых членов в правой части (24) будем считать справедливым **Предположение:**

6 Поведенческие характеристики $I_{S,H}$, $\mathcal{F_S}$, $\mathcal{F_H}$ при изменении координаты j близки к линейным функциям от $p(i,j,t)$ и слабо изменяются как функции аргументов j, $p_1(i,j,t)$, $p_2(i,j,t)$ (данное Предположение аналогично предыдущему, но по отношению к функциям $I_{S,H}$, $\mathcal{F_S}$, $\mathcal{F_H}$).

Тогда

$$\Delta p_{S,H}(i^*+1,t) = \sum_{j^*=1}^{j^*=n(i^*+1)} I_{S,H}(i^*+1,j^*,t,\ldots)\cdot\mathcal{F}_S(i^*+1,j^*,t,\ldots)\Delta t \approx$$

$$\approx n(i^*+1)\,I_{S,H}(i^*+1,t,\bar{p}(i^*+1,t),\ldots)\cdot\mathcal{F}_S(i^*+1,t,\bar{p}(i^*+1,t),\ldots),$$

$$\Delta p_H(i^*+1,t) = \sum_{j^*=1}^{j^*=n(i^*+1)} \mathcal{F}_H(i^*+1,j^*,t,\ldots)\Delta t \approx$$

$$\approx n(i^*+1)\,\mathcal{F}_H(i^*+1,t,\bar{p}(i^*+1,t),\ldots)\Delta t. \tag{29}$$

Объединяя (25) – (29), получим полное приращение власти в $(i+1)$-ом слое (звездочку над индексом i теперь можно опустить) за время Δt

$$\begin{aligned}
&\Delta p(i+1,t) = k(i,t,\ldots)[n(i)\bar{p}(i,t) - n(i+1)\bar{p}(i+1,t)]\Delta t-\\
&-k(i+1,t,\ldots)[n(i+1)\bar{p}(i+1,t) - n(i+2)\bar{p}(i+2,t)]\Delta t+\\
&+\sum_{q=1}^{i}\chi(i-q,i+1,t,\ldots)\,[n(i-q)\bar{p}(i-q,t) - n(i+1)\bar{p}(i+1,t)]\Delta t-\\
&-\sum_{l=3}^{N-i}\chi(i+1,i+l,t,\ldots)\,[n(i+1)\bar{p}(i+1,t) - n(i+l)\bar{p}(i+l,t)]\Delta t+\\
&+n(i+1)\,I_{S,H}(i+1,t,\ldots)\cdot\mathcal{F}_S(i+1,t,\ldots) + n(i+1)\,\mathcal{F}_H(i+1,t,\ldots).
\end{aligned} \tag{30}$$

Система (30), состоящая из $N-1$ уравнений относительно $N-1$ неизвестных величин $\bar{p}(i+1,t)$, $1 \leq i \leq N-1$, вместе с двумя заданными граничными условиями и начальными условиями представляет собой существенно более простую, чем (24) замкнутую дискретную модель рассматриваемой системы. Она справедлива в Предположениях 5, 6. Заметим, что ее нетрудно записать не относительно величин $\bar{p}(i+1,t)$ — средней власти одного чиновника в $(i+1)$-ом слое, а относительно величин $p(i+1,t)$ — уровней власти, реализуемой всем иерархическим слоем (в такой записи она, естественно, совпадает с построенной в [1, 2] дискретной моделью для одноцепочечной иерархии).

3. Непрерывная макромодель иерархии Будем считать число иерархических слоев достаточно большим ($N \gg 1$), а все входящие в модель (30) функции достаточно "гладкими". Перейдем от дискретной координаты $0 \leq i \leq N$ к непрерывной координате x. Пусть номерам i соответствуют точки x_i (выбранные, например, по правилу $x_i = i$), а числу слоев N — "длина" иерархической структуры (длина отрезка $[0,l]$, $l = x_N$). Дискретным функциям $f(i,t,\ldots)$ модели 30 будут отвечать также гладкие функции непрерывного аргумента $f(x,t,\ldots)$ (в точках x_i значения дискретных и непрерывных функций, естественно, совпадают). Будем также трактовать промежуток Δt как бесконечно малый.

Тогда разлагая функции $f(x,t,\ldots)$ в окрестности произвольной точки (x_{i+1},t) в ряд Тейлора, подставляя получающиеся выражения в левую часть и в первые два члена правой части (30) (т.е. заменяя конечные разности производными), заменяя суммы в правой части (30) на соответствующие интегралы и отбрасывая члены более высокого порядка малости (подробные выкладки не приводятся ввиду их элементарности), приходим к уравнению:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t,p,\partial p/\partial x,p_1,p_2,\ldots)\frac{\partial(np)}{\partial x}\right) + \\
&+\int_0^l \chi(x,x',t,p(x,t),p(x',t),[p(x',t)-p(x,t)],p_1,p_2,\ldots)[n(x')p(x',t)- \\
&-n(x)p(x,t)]\,dx' + n(x)I_{S,H}(x,t,p,p_1,p_2,\ldots)\cdot \\
&\cdot\mathcal{F}_S(x,t,p,p_1,p_2,\ldots) + n(x)\mathcal{F}_H(x,t,p,p_1,p_2,\ldots),
\end{aligned}
\tag{31}
$$

справедливому при всех $0 < x < l$, $t > t_0$ (черточки над функциями p, p_1, p_2 для простоты записи опущены).

Уравнение (31) имеет прозрачный смысл (напомним, что функция $p(x,t)$ отвечает среднему, на одного чиновника, уровню власти в иерархическом слое с координатой x, а величина $n(x)$ — число чиновников в этом слое). При $n(x) \equiv 1$ оно совпадает с уравнением непрерывной модели для одноцепочечной иерархии [1, 2]. Аналогичное совпадение имеет место и в случае, если уравнение (31) переписать относительно величины $n(x)p(x,t)$ — полной власти, реализуемой иерархическим слоем x в момент времени t.

Для замыкания непрерывной модели необходимо задать соответствующие граничные условия, имеющие, например (в случае "полной" иерархии — см. [1, 2]) вид:

$$k\,\frac{\partial(np)}{\partial x}\,|_{x=0} = k\,\frac{\partial(np)}{\partial x}\,|_{x=l} \qquad 0 \le x \le l, \tag{32}$$

а также начальное распределение искомой величины

$$n(x)\,p(x,t_0) \;=\; n(x)p_0(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{33}$$

Тогда из модели (31) – (33) однозначно определяется искомая величина $p(x,t)$ — распределение власти в иерархии в любой момент времени $t \ge t_0$.

Заключение

Построенные в данной работе модели (24), (30), (31) представляют собой убывающую по сложности совокупность математических описаний распределения власти в иерархии, взаимодействующей с гражданским обществом.

Самой подробной из них служит модель (24), в которой властная структура рассматривается в виде некоторого древа, а ее поведение определяется суммой индивидуальных поведений всех составляющих ее частей. Тем самым, получено описание иерархии на *микроуровне* (при этом считаются справедливыми Предположения 1–4.

Более простая агрегированная модель (30) дает описание иерархии в виде цепочки, состоящей из неких средних инстанций, т.е. на *макроуровне*. Она справедлива при дополнительных Предположениях 5, 6 и непосредственно не содержит индивидуальных характеристик всех элементов изучаемой системы.

Наконец, справедливая при дополнительных предположениях (см. п. 3, § 3), *непрерывная макромодель* (31) является наиболее простым описанием властной структуры, удобным для исследования аналитическими методами и *обоснованным через микроописания* (при численной реализации она переходит в дискретную модель (30)). В качестве частного случая (31) содержит в себе построенные и изучавшиеся ранее модели системы "власть — общество".

Отметим, что ряд допущений, делавшихся при построении данных моделей может быть ослаблен (например, предположения об однократной подчиненности в иерархии или о "гладкости" поведенческих характеристик ее элементов) и, тем самым, они могут быть должным образом обобщены в соответствии со строением и свойствами тех или иных конкретных структур власти.

Литература

1. *А.П.Михайлов*, Математическое моделирование динамики распределения власти в иерархических структурах. // Математическое моделирование, т. 6, N 6, 1994, с. 108–138.

2. *A.P.Mikhailov*, Mathematical Modeling of Power Distribution in State Hierarchical Structures Interacting with Civil Society. Proceeding of 14^{th} IMACS World Congress, Atlanta, USA, 1994, v. 2, p. 828–830.

3. *К.С. Гаджиев*, Введение в политическую науку. М.: "Логос", 1997, 542 с.

4. *Rapoport A.* Mathematical Models in the Social and Behavioral Sciences. — N.Y.: Wiley, 1983.

5. "Известия", 20.01.2000г., N 10 (25602), с. 1.

6. "Аргументы и факты", 1998г., май, N 19.

7. *A.P.Mikhailov*, Effecient Strategies of Corruption Suppression in State Power Hierarchies. Proceeding of 15^{th} IMACS World Congress, Berlin, Germany, 1997, v. 3, p. 727–732.

8. *А.П.Михайлов*, Модель коррумпированных властных иерархий. // Математическое моделирование, т. 11, N 1, 1999, с. 3–17.