Обостряющиеся автомодельные решения задач Коши для квазилинейного параболического уравнения[1]

А.Н. Васильев[2], А.П. Михайлов[3]

Для одномерного уравнения нелинейной теплопроводности предложена постановка автомодельной задачи Коши, позволяющая определить все допускаемые степенной автомодельностью начальные распределения температуры в неограниченном пространстве. Подробно изучена их эволюция со временем в случае режимов с обострением. Получены новые классы решений и подробно изучены их физические свойства.

1. Постановка задачи и результаты асимптотического анализа.

Настоящая работа посвящена изучению эволюции начальных распределений температуры (задача Коши) для уравнения типа нелинейной теплопроводности в одномерном (плоском, цилиндрическом и сферическом) случае без источников или стоков тепла. Изучение производится для уравнения с наиболее типичной (степенной) нелинейностью в классе степенной автомодельности. Рассматриваются режимы эволюции с обострением на отрезке времени $-\infty < t < 0$ (режимы без обострения, т.е. на отрезке времени $0 < t < \infty$, подробно изучены в [1], [2]).Начальные данные не задаются априори, а выясняются из асимптотического анализа решений соответствующих автомодельных уравнений, что позволяет выделить все начальные (и конечные) состояния среды, допускаемые выбранным типом автомодельности. Другой методической особенностью работы является использование (отличной от традиционной) замены, сводящей исходную задачу к ОДУ первого порядка с относительно простой нелинейностью. Показано существование трех типов эволюции начальных данных, т.е. HS —, S — и LS — режимов. Для последних двух реализуется эффект пространственной локализации тепла. Тем самым для задачи Коши получена (с учетом использования теорем сравнения) классификация решений с обострением, во многом аналогичная

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01297)

[2]Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, м.о., Институтский пр., 9

[3]Институт математического моделирования РАН, 125047 Москва, Миусская пл., 4а

той, что дана в [3] для граничных режимов и режимов горения в теплопроводных средах.

1.1. Рассматривается пространственно-одномерный процесс переноса тепла для случаев плоской, цилиндрической и сферической геометрий. В одномерном случае поток тепла

$$\mathbf{W} = -k(T)\,\nabla T \tag{1.1}$$

не равен нулю лишь по одной из координат. В выражении (1.1) для коэффициента теплопроводности принята степенная зависимость от температуры

$$k(T) = k_0 T^\sigma, \quad \sigma > 0, \quad k_0 = \mathrm{Const} > 0. \tag{1.2}$$

Введем параметр симметрии ν, принимающий следующие значения: $\nu = 0, 1\,2$ — плоская, цилиндрическая и сферическая симметрия соответственно.

В каждой из этих симметрий общее уравнение теплопроводности переходит в известное скалярное уравнение

$$\frac{1}{k_0}\,\rho^\nu\,\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^\nu T^\sigma\,\frac{\partial T}{\partial\rho}\right), \tag{1.3}$$

где ρ — пространственная координата, T — температура, k_0 — коэффициент температуропроводности.

1.2. Для уравнения (1.3) исследуется автомодельная задача Коши для промежутка времени $-\infty < t \le 0$ (режим с обострением), когда начальные условия ставятся при $t \to -\infty$ (в случае режима без обострения начальные условия ставятся при $t \to +0$).

1.3. В работе изучаются степенные автомодельные решения. Введя параметр s, принимающий значения $s = +1,\ -1$ — для режима без обострения и для режима с обострением соответственно, запишем выражения для автомодельных величин единообразно

$$T = T_0(st)^n\Theta(\xi), \quad \rho = \rho_0(st)^m\xi. \tag{1.4}$$

Здесь ξ — автомодельная координата, $\Theta(\xi)$ — автомодельный представитель температуры, ρ_0 и T_0 — некоторые размерные константы — масштабы измерения пространственной координаты и температуры.

При выбранном виде автомодельности, очевидно, должны выполняться следующие соотношения

$$T_0^\sigma = \rho_0^2 k^{-1}, \tag{1.5}$$

$$2m - 1 = \sigma n. \tag{1.6}$$

Тогда уравнения для автомодельных функций имеют вид

$$s\xi^{\nu}\left(n\Theta - m\xi\,\frac{d\Theta}{d\xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{\nu}\Theta^{\sigma}\,\frac{d\Theta}{d\xi}\right), \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} W &= -\xi^{\nu}\Theta^{\sigma}\,\frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{\xi^{\nu}}{1+\sigma}\,\frac{d\Theta^{\sigma+1}}{d\xi}, \\ \frac{dW}{d\xi} &= -s\xi^{\nu}\left(n\Theta - m\xi\,\frac{d\Theta}{d\xi}\right). \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.4. Исходя из физических соображений, следует поставить условие равенства нулю потока тепла в центре симметрии

$$\mathbf{W}|_{\rho=0} = 0, \tag{1.9}$$

что соответствует отсутствию поверхностных источников (стоков) тепла в начале координат. В автомодельном представлении это условие имеет вид

$$\Theta^{\sigma}\,\frac{d\Theta}{d\xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{1}{1+\sigma}\,\frac{d\Theta^{\sigma+1}}{d\xi}\bigg|_{\xi=0} = 0. \tag{1.10}$$

В соответствии с естественными физическими ограничениями типичны такие требования для рассматриваемых решений (см. [3]):

неотрицательность температуры $T(\rho,t)$ $\forall t$, $\forall\rho$;

ограниченность температуры $T(\rho,t)$ и потока $W(\rho,t)$ при $\rho \neq 0,\infty$;

непрерывность и дифференцируемость один раз по t и дважды по ρ температуры $T(\rho,t)$ $\forall t \in (0,+\infty)$ ($\forall t \in (0,-\infty)$), $\forall\rho \in [0,\infty)$ (при $t=0$ ($t=-\infty$) это требование может не соблюдаться при $\rho=0$);

непрерывность и дифференцируемость по ρ потока $W(\rho,t)$ $\forall t \in (0,+\infty)$ ($\forall t \in (-\infty,0)$), $\forall\rho \in [0,\infty)$ (при $t=0$ ($t=-\infty$) это требование может не соблюдаться при $\rho=0$).

1.5. Для уравнения (1.7) в автомодельных переменных начальные условия и конечные распределения ($t \to -\infty$, $t \to +0$) соответствуют, в зависимости от значений параметров, либо $\xi \to +0$, либо $\xi \to +\infty$. Таким образом, встает задача поиска всех возможных асимптотик уравнения (1.7) при $\xi \to +0$ (здесь они должны согласовываться с условием (1.10)) и при $\xi \to +\infty$. Из решения этой задачи получаются все возможные начальные и конечные распределения температуры, допускаемые рассматриваемым типом автомодельности, такой подход является одной из методических особенностей работы.

1.6. Для дальнейшего исследования удобно понизить порядок уравнения (1.7) и преобразовать его к уравнению первого порядка. Воспользовавшись отличной от традиционной [5], [6] заменой (предложенной в работе [7] для другого типа задач), для уравнения (1.7) получим замену переменных, переводящую его в ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} x &= \xi^{1-\nu}\Theta^{-(\sigma+1)}W \\ y &= \xi^{1+\nu}\Theta W^{-1}. \end{cases} \tag{1.11}$$

Само же уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\,\frac{1+\nu-x+s(n+mx)y}{1-\nu+(\sigma+1)x-s(n+mx)y}, \tag{1.12}$$

содержащему относительно простые нелинейности по функциям x, y. Именно уравнение (1.12) будет в дальнейшем использоваться для выяснения вопроса о существовании и единственности автомодельных решений исходной задачи.

<u>1.7.</u> В этом пункте дадим краткое описание изоклин уравнения (1.12) и перечислим его особые точки.

Уравнение (1.12) имеет две изоклины нуля:

$$y \equiv 0, \tag{1.13}$$

$$1+\nu-x+s(n+mx)y = 0. \tag{1.14}$$

Изоклина (1.14) пересекает ось Ox в точке $x = 1+\nu$ (обозначим эту точку $C(1+\nu, 0)$) и ось Oy в точке $y = -s\dfrac{1+\nu}{n}$ (обозначим ее $B(0, -s\dfrac{1+\nu}{n})$). Изоклина (1.14) уходит в бесконечность по x при $y = s/m$ (обозначим эту точку $H(\infty, s/m)$), а в бесконечность по y при $x = -n/m$ (обозначим эту точку $D(-n/m, \infty)$).

Уравнение (1.12) имеет две изоклины бесконечности:

$$x \equiv 0, \tag{1.15}$$

$$1-\nu+(\sigma+1)x-s(n+mx)y = 0. \tag{1.16}$$

Изоклина (1.16) пересекает ось Ox в точке $x = \dfrac{\nu-1}{\sigma+1}$ (обозначим эту точку $F(\dfrac{\nu-1}{\sigma+1}, 0)$, если она не совпадает, как это происходит при $\nu = 1$, с точкой $O(0,0)$) и ось Oy в точке $y = s\dfrac{1-\nu}{n}$ (обозначим ее $E(0, s\dfrac{1-\nu}{n})$, если она не совпадает, как это происходит при $\nu = 1$, с точкой $O(0,0)$). Изоклина (1.16) уходит в бесконечность по x при $y = (\sigma+1)s/m$ (обозначим эту точку $L(\infty, s\dfrac{\sigma+1}{m})$), а в бесконечность по y в точке $D(-n/m, \infty)$.

Так как изоклины имеют достаточно простой вид, определение всех их основных свойств не представляет никаких трудностей и здесь не приводится.

Изоклины (1.14) и (1.16) пересекаются при:

$$x = -\frac{2}{\sigma}, \quad \overset{(0)}{y}(-\frac{2}{\sigma}) = \overset{(\infty)}{y}(-\frac{2}{\sigma}) = s[(1+\nu)\sigma + 2] = s\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma}.$$

Обозначим эту точку $A(-\frac{2}{\sigma}, s\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$.

Таким образом, мы получили набор особых точек $O(0,0)$, $A(-\frac{2}{\sigma}, s\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$, $B(0, -s\frac{1+\nu}{n})$, $C(1+\nu, 0)$, $D(-n/m, \infty)$ $E(0, s\frac{1-\nu}{n})$, $F(\frac{\nu-1}{\sigma+1}, 0)$, $H(\infty, s/m)$ и $L(\infty, s\frac{\sigma+1}{m})$.

__1.8.__ В этом пункте приведем основные результаты асимптотического анализа уравнения (1.7) и результаты анализа особых точек уравнения (1.12), соответствующих полученным асимптотикам в плоскости переменных (x, y). Подробный анализ асимптотик уравнения (1.7) и всех особых точек уравнения (1.12) дан в [1-3]. Напомним только, что асимптотический анализ уравнения (1.7) проводился в классе разложимых в степенной ряд (не обязательно по целым или положительным степеням) функций при $\xi \to 0$ и $\xi \to \infty$ таких, что $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ не являются их существенно особыми точками.

Тогда, очевидно, в случаях $s = 1, -1$ возможны всего три ситуации:

$$1)\ \lim_{\xi^{\to +0}_{\to +\infty}} \Theta(\xi) = 0; \qquad 2)\ \lim_{\xi^{\to +0}_{\to +\infty}} \Theta(\xi) = \mathrm{Const}; \qquad 3)\ \lim_{\xi^{\to +0}_{\to +\infty}} \Theta(\xi) = +\infty.$$

(Здесь обозначение $\xi^{\to 0}_{\to\infty}$ следует понимать либо как $\xi \to 0$, либо $\xi \to \infty$).

На основе проведенного в [1], [4] анализа было получено три семейства асимптотик и одно известное точное решение в разделяющихся переменных.

1. Для режима с обострением ($s = -1$) уравнение (1.7) имеет известное точное решение

$$\Theta = \left[2\left(1+\nu+\frac{2}{\sigma}\right)\right]^{-1/\sigma} \xi^{2/\sigma} = C_0\xi^{2/\sigma}, \quad C_0^{-\sigma} = 2\left(1+\nu+\frac{2}{\sigma}\right), \tag{1.17}$$

соответствующее так называемому S-режиму [1].

2. Асимптотики с ограниченной и отличной от нуля при $t \neq -\infty$, $t \neq 0$, $t \neq +\infty$ температурой в центре симметрии характеризуются тем, что

$$\lim_{\xi \to 0} \Theta(\xi) = \mathrm{Const},$$

и имеют вид

$$\Theta = C\left[1+\frac{snC^{-\sigma}}{2(1+\nu)}\xi^2+\frac{n^2C^{-2\sigma}}{8(1+\nu)(3+\nu)}\left(1-2\frac{m}{n}-\frac{3+\nu}{1+\nu}\sigma\right)\xi^4+\cdots\right]. \tag{1.18}$$

При $\xi \to 0$ граничное условие соблюдается.
В плоскости (x, y) получим:

$$\begin{cases} x \;=\; -\dfrac{snC^{-\sigma}}{1+\nu}\xi^2\left[1-\dfrac{snC^{-\sigma}}{(1+\nu)(3+\nu)}\left(1+\dfrac{m}{n}(1+\nu)+\dfrac{3+\nu}{2}\sigma\right)\xi^2+\cdots\right] \\ y \;=\; -s\dfrac{1+\nu}{n}\left[1+\dfrac{snC^{-\sigma}}{(1+\nu)(3+\nu)}\left(1+\dfrac{m}{n}(1+\nu)\right)\xi^2+\cdots\right]. \end{cases} \tag{1.19}$$

Или, выражая y через x, имеем:

$$y = -s\frac{1+\nu}{n}+\frac{s}{n}\frac{1+\nu}{3+\nu}\left(1+(1+\nu)\frac{m}{n}\right)x+\cdots \tag{1.20}$$

Соответствующая особая точка $B(0, -s\dfrac{1+\nu}{n})$ — седло (см. также [2].
Введем обозначение:

$$\mu = 1+\nu+\frac{n}{m}. \tag{1.21}$$

Наклон критических направлений (сепаратрис седла):

$$\lambda_1 = 2, \qquad K_1 = s\frac{m}{n^2}\cdot\frac{1+\nu}{3+\nu}\mu \tag{1.22}$$

$$\lambda_2 = -(1+\nu), \quad K_2 = \infty.$$

Легко видеть, что направление K_1 из (1.22) и наклон прямой (1.20), описывающей поведение асимптотики (1.18) в плоскости (x, y), совпадают. Следовательно, если существует решение, содержащее в виде асимптотики начала или конца процесса асимптотику (1.18) (с отличной от нуля температурой в центре симметрии), то оно единственно (так как поле интегральных кривых не содержит особых прямых).

Приведем здесь еще одно полезное соотношение между свойствами сепаратрисы седла, отвечающей значению λ_1, и изоклины нуля (1.14) в окрестности исследуемой особой точки:

$$\operatorname{sign}(y-\overset{(o)}{y}) = -\operatorname{sign}(sm\mu x). \tag{1.23}$$

Отметим также, что уравнение (1.7) не имеет асимптотик, таких что

$$\lim_{\xi\to\infty}\Theta(\xi) = \text{Const}.$$

3. Асимптотики, «близкие» по пространству к S-режиму, существующие только в режиме с обострением ($s=-1$), когда выполняется

$$\begin{array}{rcl} -\infty & < & m \ < \ 0 \\ 0 & < & m \ < \ \tilde{C}_0-\sqrt{4C_0^\sigma} \\ \tilde{C}_0+\sqrt{4C_0^\sigma} & < & m \ < \ +\infty, \end{array} \tag{1.24}$$

имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Theta & = & C_0\xi^{2/\sigma}\left[1+D\xi^{\lambda_{1,2}-2/\sigma}+\cdots\right], \quad \forall D, \\ \lambda_{1,2}-\dfrac{2}{\sigma} & = & \dfrac{1}{2}C_0^{-\sigma}\left[m-\tilde{C}_0\pm\sqrt{[m-\tilde{C}_0]^2-4C_0^\sigma}\right]; \end{array} \right. \tag{1.25}$$

Здесь введено обозначение:

$$\tilde{C}_0=\left(3+\nu+\frac{4}{\sigma}\right)C_0^\sigma=1+(1-\nu)C_0^\sigma. \tag{1.26}$$

Эти асимптотики могут существовать как при $\xi\to 0$, так и при $\xi\to\infty$ в зависимости от знака величины $\lambda_{1,2}-2/\sigma$. Поведение координаты ξ в зависимости от знака выражения $\lambda_{1,2}-2/\sigma$ следующее:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1-2/\sigma>0 \ \text{ при } \ m-\tilde{C}_0>0 \ \Rightarrow \xi\to 0, \\ \lambda_1-2/\sigma<0 \ \text{ при } \ m-\tilde{C}_0<0 \ \Rightarrow \xi\to \infty; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2-2/\sigma>0 \ \text{ при } \ m-\tilde{C}_0>0 \ \Rightarrow \xi\to 0, \\ \lambda_2-2/\sigma<0 \ \text{ при } \ m-\tilde{C}_0<0 \ \Rightarrow \xi\to \infty. \end{array} \right.$$

При $\xi\to 0$ граничное условие соблюдается.

В плоскость (x,y) эти асимптотики отображаются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{2}{\sigma}\left[1+D\dfrac{\sigma}{2}\left(\lambda_{1,2}-\dfrac{2}{\sigma}\right)\xi^{\lambda_{1,2}-2/\sigma}+\cdots\right] \\ y & = & -(2+(1+\nu)\sigma)\cdot\left[1-\dfrac{\sigma}{2}\left(\lambda_{1,2}-\dfrac{2}{\sigma}+2\right)\xi^{\lambda_{1,2}-2/\sigma}+\cdots\right], \end{array} \right. \tag{1.27}$$

или, выражая y через x,

$$y=K_{1,2}\left[x+\frac{2}{\sigma}\right]-\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma}, \quad K_{1,2}=\frac{\sigma^2}{4}C_0^{-\sigma}\frac{(\lambda_{1,2}-2/\sigma+2)}{(2/\sigma-\lambda_{1,2})}. \tag{1.28}$$

Соответствующая особая точка $A(-\frac{2}{\sigma},s\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$ (см. также [2]) в режиме без обострения интереса, вообще говоря, не представляет, так как она не соответствует какой-либо асимптотике исследуемого уравнения (1.7) и, кроме того, расположена во II квадранте, в который интегральные кривые, соответствующие асимптотикам начала или конца процесса, не попадают.

В режиме с обострением

$$\begin{cases} \text{при} \quad \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^\sigma} < m < \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^\sigma}, \\ \lambda^*_{1,2} \in C, \quad Re\lambda^*_{1,2} \neq 0 - \text{в режиме с} \\ \text{обострением асимптотика (1.25) не существует,} \\ \text{точка} \quad A(-\dfrac{2}{\sigma}, s\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma}) - \text{фокус;} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{при} \quad m < 0, \quad 0 < m < \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^\sigma}, \quad (\text{здесь} \quad m < \tilde{C}_0), \\ \lambda^*_{1,2} \in R, \quad \lambda^*_{1,2} > 0, \quad \lambda_{1,2} - 2/\sigma < 0 - \text{в режиме с} \\ \text{обострением в асимптотике (1.25)} : \quad \xi \to \infty, \\ \text{точка} \quad A(-\dfrac{2}{\sigma}, s\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma}) - \text{узел;} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{при} \quad m > \tilde{C}_0 + \sqrt{4C_0^\sigma}, \ (\text{здесь} \quad m > \tilde{C}_0), \\ \lambda^*_{1,2} \in R, \quad \lambda^*_{1,2} < 0, \quad \lambda_{1,2} - 2/\sigma > 0 - \text{в режиме с} \\ \text{обострением в асимптотике (1.25)} : \quad \xi \to 0, \\ \text{точка} \quad A(-\dfrac{2}{\sigma}, s\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma}) - \text{узел.} \end{cases}$$

$$\lambda^*_{1,2} = \frac{2}{\sigma} - \lambda_{1,2}, \tag{1.29}$$

где $\lambda_{1,2} - 2/\sigma$ — показатель степени в асимптотике, задаваемой формулой (1.25).

В случае, когда точка A — узел (и асимптотика (1.25) существует), найдем критические направления узла, вдоль которых в него входят интегральные кривые.

Собственному значению $\lambda^*_2 = \dfrac{2}{\sigma} - \lambda_2 = \dfrac{2}{\sigma} - \lambda_-$ соответствует направление

$$K_- = K_2 = \frac{\sigma^2}{4}\left(1 - \nu - mC_0^{-\sigma} - C_0^{-\sigma}\sqrt{[m - \tilde{C}_0]^2 - 4C_0^\sigma}\right). \tag{1.30}$$

Собственному значению $\lambda^*_1 = \dfrac{2}{\sigma} - \lambda_1 = \dfrac{2}{\sigma} - \lambda_+$ соответствует направление

$$K_+ = K_1 = \frac{\sigma^2}{4}\left(1 - \nu - mC_0^{-\sigma} + C_0^{-\sigma}\sqrt{[m - \tilde{C}_0]^2 - 4C_0^\sigma}\right). \tag{1.31}$$

После несложных преобразований можно убедиться в том, что величины наклонов $K_{1,2}$ из (1.28) совпадают с наклонами критических направлений $K_\pm$, причем $K_1 \equiv K_+$ соответствует $\lambda_1 \equiv \lambda_+$, а $K_2 \equiv K_-$ соответствует

$\lambda_2 \equiv \lambda_-$. Как и следовало ожидать, интегральные кривые, соответствующие рассматриваемой асимптотике (1.25) в плоскости (x, y), входят в особую точку $A(-\frac{2}{\sigma}, s\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$ вдоль критических направлений. Для сравнения с наклонами критических направлений полезно вычислить величины

$$\frac{d\overset{(o)}{y}}{dx}\Big|_{x=-2/\sigma} = -\sigma^2\left(\frac{m}{2}C_0^{-\sigma} - \frac{1}{\sigma}\right), \tag{1.32}$$

$$\frac{d\overset{(\infty)}{y}}{dx}\Big|_{x=-2/\sigma} = -\sigma^2\left(\frac{m}{2}C_0^{-\sigma} - \frac{1}{\sigma} - 1\right). \tag{1.33}$$

4. Асимптотики с неограниченной или нулевой температурой в центре симметрии (как и асимптотики, «близкие» по пространству к S-режиму) характеризуются тем, что

$$\lim_{\substack{\xi\to+0\\ \xi\to+\infty}} \Theta(\xi) = 0, +\infty.$$

Введем обозначения

$$\gamma = \frac{n}{m}\left((\sigma+1)\frac{n}{m} + \nu - 1\right), \tag{1.34}$$

$$\tilde{\gamma} = \left((\sigma+1)\frac{n}{m} - \frac{1}{m}\right)\left((\sigma+1)\frac{n}{m} + \nu - 1 - \frac{1}{m}\right). \tag{1.35}$$

Тогда эти асимптотики имеют вид

$$\Theta = C\xi^{n/m}\left[1 + sC^{\sigma}\gamma\xi^{-1/m} + \frac{C^{2\sigma}}{2}\gamma\tilde{\gamma}\xi^{-2/m} + \cdots\right]. \tag{1.36}$$

Асимптотики существуют как при $\xi \to 0$, так и при $\xi \to \infty$. Для согласованности с требованием малости поправок по отношению к основному члену асимптотического разложения необходимо выполнение условий:

— для $\xi \to 0$ выполнение неравенства $n/m > 2/\sigma$ (учитывая условие автомодельности (1.6),

получим $m < 0, \quad n < 0$);

— для $\xi \to \infty$ выполнение неравенства $n/m < 2/\sigma$ (учитывая условие автомодельности (1.6),

получим $m > 0$).

При $\xi \to 0$ граничное условие соблюдается.

В плоскости (x,y) эти асимптотики имеют вид:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{n}{m}\left[1 - sC^{\sigma}\dfrac{\gamma}{n}\xi^{-1/m} + \dfrac{C^{2\sigma}}{2}\dfrac{2\gamma}{n}(\gamma-\tilde{\gamma})\xi^{-2/m} + \cdots\right] \\ y = \dfrac{1}{-\dfrac{n}{m}C^{\sigma}\xi^{-1/m}}\left[1 + s\left(\dfrac{1}{n}-\sigma\right)\gamma C^{\sigma}\xi^{-1/m} + \right. \\ \quad + \left(\left(\sigma(\sigma+1) - \dfrac{2}{n}(\sigma+1) + \dfrac{2}{n^2}\right)\gamma - \right. \\ \quad \left. - \left(\sigma - \dfrac{2}{n}\right)\tilde{\gamma}\right)\gamma\dfrac{C^{2\sigma}}{2}\xi^{-2/m} + \cdots \Bigg]. \end{cases} \tag{1.37}$$

Соответствующая им особая точка — $D(-n/m, \pm\infty)$ (см. также [1,2]). Для ее исследования в уравнении (1.12) производится замена, переводящую точку $D(-n/m, \pm\infty)$ в $O'(0,0)$. Тогда

$$\begin{gathered} x = -\frac{n}{m} + x', \quad y = -\frac{1}{y'}; \\ y'_{acc} = \frac{sn}{\gamma}x'_{acc}\left[1 + \frac{1}{\gamma}\left((\sigma+1)\frac{n}{m} - \frac{1}{m}\right)x'_{acc} + \cdots\right]. \end{gathered} \tag{1.38}$$

Вдоль критического направления $K'_1 = 0$ (ось $O'x'$) в особую точку $O'(0,0)$ входит лишь одна кривая. Рассмотрим теперь критическое направление

$$K'_2 = \frac{sm}{(\sigma+1)\dfrac{n}{m} + \nu - 1} = \frac{sn}{\gamma}.$$

Из той области, в которой находится асимптотика (1.36), в особую точку $O'(0,0)$ вдоль критического направления K'_2 в случае режима с обострением входит лишь одна кривая, причем наклон асимптотики при вхождении в особую точку $O'(0,0)$ совпадает с критическим направлением и наклоном изоклины бесконечности. Следовательно, этой единственной кривой и является рассматриваемая асимптотика (в случае режима без обострения из рассматриваемой области в особую точку $O'(0,0)$ входит бесконечное число интегральных кривых), в том числе и рассматриваемая асимптотика.

Опишем расположение изоклин нуля (1.14), бесконечности (1.16) и асимптотики (1.36) в плоскости (x,y) при их стремлении к особой точке $D(-n/m, \pm\infty)$. При $\xi^{-1/m} \to 0$ имеем соотношения:

$$\operatorname{sign}(y_{acc} - \overset{(\infty)}{y}) = \operatorname{sign}\left(-\frac{s}{nm}\right), \tag{1.39}$$

$$\operatorname{sing}(y_{acc} - \overset{(0)}{y}) = \operatorname{sign}\left(\frac{1}{m\gamma}\right). \tag{1.40}$$

2. Существование автомодельных решений.

Для выяснения вопроса о существовании (или несуществовании) и единственности автомодельных (1.4) решений исходной задачи (1.3), (1.9) в зависимости от безразмерных параметров (например, параметра коэффициента теплопроводности σ и параметра автомодельности m) необходимо построить поле интегральных кривых уравнения (1.12). Затем перевести в плоскость переменных (x, y) асимптотики автомодельного уравнения (1.7) и рассмотреть возможность соединения в этой плоскости интегральных кривых, соответсвующих асимптотикам начала и конца процесса. Подробный анализ асимптотик автомодельного уравнения (1.7), изоклин и особых точек ОДУ первого порядка (1.12) был проведен в [1], [2], [4], а основные его результаты кратко повторены в разд. 1.

Рассмотрим, как уже отмечалось, режим с обострением ($s = -1$). Анализ удобно проводить в зависимости от значения параматра m.

а: $m < 0$ (см. фиг. 1 для $\nu = 2$).

Началу процесса здесь соответствует асимптотика (1.25) при $\xi \to \infty$, а концу процесса — асимптотики (1.18) и (1.36) при $\xi \to 0$.

Интегральная кривая, соответствующие в плоскости (x, y) семейству асимптотик (1.18), выходит из особой точки $B(0, \dfrac{1+\nu}{n})$ по сепаратрисе с наклоном $K > 0$, задаваемым формулой (1.22), причем $x_{acc} \to -0$ при $\xi \to 0$ (см. формулы (1.37)), и попадает в область с положительным наклоном поля интегральных кривых, ограниченную сверху изоклиной бесконечности (1.16), а снизу — изоклиной нуля (1.14) (см. формулу (1.23)), имеющими в данном случае положительный наклон и пересекающимися в особой точке $A(-\dfrac{2}{\sigma}, -\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$. Таким образом, не имея возможности пересечь ограничивающие область изоклины, рассматриваемая кривая попадает вместе с остальными интегральными кривыми из этой области в особую точку $A(-\dfrac{2}{\sigma}, -\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$, которая соответствует началу процесса.

В особую точку $A(-\dfrac{2}{\sigma}, -\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$ интегральные кривые попадают вдоль критических направлений (3.14), (3.15). Напомним, что при данных значениях параметров точка A – узел. Следовательно, решение, имеющее в начале процесса асимптотику (1.25), а в конце — асимптотику (1.18), существует и в силу единственности кривой, входящей в особую точку B по указанному направлению, единственно.

Конкретизируем некоторые свойства асимптотики (1.25), отвечающей началу этого процесса (так как, вообще говоря, формулой (1.25) задается два семейства асимптотик, лежащих «рядом» с S-режимом). Во-первых, кривая, отображающая решение в плоскости (x, y), входит в особую точку A с положительным наклоном, так как она лежит между изоклинами нуля (1.14) и бесконечности (1.16), имеющими положительный наклон. Сравнив оба наклона (3.14) и (3.15) с нулем и с наклоном изоклин при $x = -2/\sigma$ (формулы (1.32), (1.33)), получим, что при $m < 0$: собственное значение $\lambda_2 \equiv \lambda_-$ соответствует критическому направлению $K_- \equiv K_2 < 0$, а собственное значение $\lambda_1 \equiv \lambda_+$ соответствует критическому направлению $K_+ \equiv K_1 > 0$, причем

$$0 < \frac{d\overset{(0)}{y}}{dx}\Big|_{x=-2/\sigma} < K_1 < \frac{d\overset{(\infty)}{y}}{dx}\Big|_{x=-2/\sigma}.$$

Кроме того, очевидно, что подход к особой точке A по асимптотике (1.25) осуществляется таким образом, что $x_{acc} \to -2/\sigma + 0$. Сравнивая с формулами (1.27) и учитывая $\lambda_1 - 2/\sigma < 0$, для константы D в формуле (1.25) имеем $D > 0$. Таким образом, эти асимптотики лежат «выше» S-режима.

Рассмотрим другую возможность. В плоскости (x, y) асимптотике (1.36) соответствует особая точка $D(-n/m, -\infty)$. Из формул (1.37) следует, что $x_{acc} \to -n/m - 0$, а из формул (1.39) и (1.40) получаем $\overset{(\infty)}{y} < y_{acc} < \overset{(0)}{y}$. Следовательно, интегральная кривая, соответствующая в плоскости (x, y) семейству асимптотик (1.36), выходя из особой точки $D(-n/m, -\infty)$ попадает в область с положительным наклоном поля интегральных кривых, ограниченную сверху изоклиной нуля (1.14), а снизу — изоклиной бесконечности (1.16), которые пересекаются в особой точке $A(-\dfrac{2}{\sigma}, -\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$ и имеют положительный наклон. Рассматриваемая интегральная кривая с увеличением ξ изменяется (как следует из (1.37)) в сторону увеличения x, следовательно не может выйти из указанной области, пересекая одну из изоклин, т.е. она вместе с остальными кривыми из этой области попадет в особую точку A. Отсюда следует, что решение, имеющее в начале процесса асимптотику (1.25), а в конце — асимптотику (1.36), существует и в силу единственности (см. анализ особой точки $D(-n/m, \pm\infty)$) интегральной кривой, входящей в особую точку $D(-n/m, -\infty)$ вдоль требуемого критического направления, единственно.

Кривая, отображающая решение в плоскости (x, y), очевидно, также входит в особую точку $A(-\dfrac{2}{\sigma}, -\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$ с положительным наклоном, т.е. вдоль критического направления $K_+ \equiv K_1$, соответствующего $\lambda_1 \equiv \lambda_+$, причем подход к точке A осуществляется по асимптотике (1.25) так, что $x_{acc} \to -2/\sigma - 0$. Сравнивая с формулами (1.27) и учитывая $\lambda_1 - 2/\sigma < 0$, для константы D в формуле (1.25) получаем оценку $D < 0$. Таким образом, эта асимптотика лежит «ниже» S-режима.

б: пусть теперь $0 < m < 1/2$.

Началу процесса соответствует асимптотика (1.18) при $\xi \to 0$, причем для отображающей ее в плоскость (x, y) интегральной кривой справедливо $x_{acc} \to -0$. Концу процесса соответствует асимптотика (1.36) и, если существует, асимптотика (1.25) при $\xi \to \infty$. Несуществование асимптотики (1.25) становится возможным (в зависимости от значения m) при $\sigma > 1 + \sqrt{2(1+\nu)}$.

Как уже было показано при исследовании режима без обострения, в случае $0 < m < 1/2$ характер поля интегральных кривых существенным образом зависит от знака параметра μ.

б.1. Рассмотрим сначала $\mu < 0$ (см. фиг. 2 для $\nu = 1$).

В этом случае параметр $\gamma > 0$. Данное в этом пункте условие можно переформулировать в виде неравенства:

$$m < \frac{2}{\sigma} C_0^{\sigma}.$$

Сравнив вышеприведенное условие с условием (1.24) существования асимптотики (1.25) легко убедиться, что в данном случае эта асимптотика всегда существует и особая точка $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2} C_0^{-\sigma})$ является узлом.

Интегральная кривая, соответствующие в плоскости (x, y) семейству асимптотик (1.18) в плоскости (x, y) выходит из особой точки $B(0, \dfrac{1+\nu}{n})$ по сепаратрисе с наклоном $K > 0$, определяемым формулой (1.22), и попадает в область с положительным наклоном поля интегральных кривых, которая ограничена сверху изоклиной бесконечности (1.16), а снизу изоклиной нуля (1.14) (см. формулу (1.23)), пересекающимися в точке $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2} C_0^{-\sigma})$. Отметим, что в случае $\nu = 0$ эта область ограничена сверху отрезком OF изоклины нуля (1.13), и уже затем отрезком FA изоклины бесконечности (1.16), что качественного характера поведения интересующей нас кривой не меняет. Кривая, вышедшая по сепаратрисе из точки $B(0, \frac{1+\nu}{n})$, пересечь указанные изоклины не может, так как они имеют положительный наклон, а движение по кривой происходит в сторону уменьшения x. Следовательно, рассматриваемая кривая вместе с остальными интегральными кривыми из этой области попадает в особую точку $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2} C_0^{-\sigma})$ вдоль критического направления, имеющего положительный наклон.

Таким образом, решение существует и единственно в силу единственности кривой, входящей в особую точку $B(0, \frac{1+\nu}{n})$ вдоль требуемого критического направления.

Изучим некоторые его свойства. Так как обе изоклины (1.14) и (1.16), между которыми лежит кривая, описывающая решение в плоскости (x, y), имеют в особой точке $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$ положительный наклон (см. формулы (1.32), (1.33)), то и сама кривая, описывающая решение, входит в точку A вдоль критического направления, имеющего положительный наклон. При рассматриваемом наборе параметров из формул (1.30) и (1.31), дающих наклон критических направлений узла $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$, видно, что для показателя степени λ_1 во втором члене асимптотики (1.25) наклон критического направления $K_1 \equiv K_+ > 0$. Таким образом, в данном случае концу процесса соответствует асимптотика (1.25) с параметром λ_1. Отображающая решение в плоскости (x, y) интегральная кривая подходит к точке $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$, оставаясь все время в области $x > -2/\sigma$, т.к. на рассматриваемой кривой $x(\xi) \to -2/\sigma + 0$ при $\xi \to \infty$. Тогда из формул (1.27), переводящих асимптотику (1.25) в плоскость (x, y), легко увидеть, что в асимптотике (1.25) константа $D > 0$.

Асимптотика (1.36) конца процесса в этом случае несоединима с асимптотикой начала процесса (1.18), так как отображающие их в плоскость (x, y) кривые лежат в разных квадрантах плоскости (x, y). Интегральная кривая, соответствующая асимптотике (1.36), лежит в первом квадранте. Из формул (1.37) видно, что для нее справедливы соотношения $x_{acc} \to -n/m - 0 > 0$, $y_{acc} \to +\infty$ при $\xi \to \infty$. Кроме того, из формул (1.39) и (1.40) следует, что $\overset{(\infty)}{y} > y_{acc} > \overset{(0)}{y} > 0$, т.е. она ограничена сверху и снизу изоклинами. При обратном движении по интегральной кривой, отображающей асимптотику (1.36), из точки $D(-n/m, +\infty)$ эта кривая входит:

при $\nu = 0$ в особую точку $O(0, 0)$ — дикритический узел;

при $\nu = 1$ также в особую точку $O(0, 0)$, причем вхождение в особую точку осуществляется из области $x > 0$, $y > 0$ — из узловой области, вдоль направления $y = 0$;

при $\nu + 2$ в особую точку $F(\frac{1}{1+\sigma}, 0)$ — узел, вдоль направления $y = 0$.

<u>Замечание.</u> В случае $\mu = 0$ (при этом $m = \sigma C_0^{\sigma}/2$) уравнение (1.12) вырождается (см. аналогичное замечание для режима без обострения). Интегральная кривая, соответствующая асимптотике (1.18) для конца процесса, в этом случае совпадает с ветвью $y = s/m$ вырожденной изо-

клины нуля и уходит по ней в особую точку $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$, критическое направление (1.31) которой при $\mu = 0$ также совпадает с прямой $y = s/m$. Откуда следует, что при $\mu = 0$ существует то же решение, что и при $\mu < 0$.

б.2. Рассмотрим теперь $\mu > 0$.

Относительно параметра m это означает

$$\frac{2}{\sigma}C_0^{\sigma} < m < \frac{1}{2}.$$

Здесь уместно произвести сравнение двух условий: $2C_0^{\sigma}/\sigma < m$ и условия (1.24) существования асимптотики (1.25), а конкретнее его части $m < \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^{\sigma}}$. Необходимо выяснить существуют ли такие значения m, удовлетворяющие этим двум условиям одновременно. Посредством несложных вычислений находим, что

$$\left[\tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^{\sigma}}\right] - \left[\frac{2}{\sigma}C_0^{\sigma}\right] = \left(2C_0^{\sigma} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Пограничный случай возможен лишь при $C_0^{\sigma} = 1/4$, т.е. при $\sigma = 2/(1-\nu) > 0$, а следовательно при $\nu = 0$ и $\sigma = 2$, в этом случае $m = 1/4$, $n = -1/4$. Во всех остальных случаях существует интервал значений параметра m, удовлетворяющих одновременно обоим поставленным условиям.

По отношению к параметру γ этот случай распадается еще на два, так как здесь возможны значения как $\gamma > 0$, так и $\gamma < 0$.

Пусть $\gamma > 0$. В терминах параметра m получим $m < 2\frac{\sigma+1}{\sigma}C_0^{\sigma}$. Сравнив это ограничение с неравенством $m < 1/2$, получим равенство:

$$\operatorname{sign}\left(2\frac{\sigma+1}{\sigma}C_0^{\sigma} - \frac{1}{2}\right) = \operatorname{sign}(1-\nu),$$

т.е. случай $\gamma < 0$ возможен лишь при $\nu = 2$.

Интегральная кривая, соответствующая в плоскости (x, y) семейству асимптотик (1.36) для конца процесса, попадает в особую точку $D(-n/m, +\infty)$ так что при $\xi \to \infty$ имеем $x_{acc} \to -n/m - 0 > 0$, $y_{acc} \to +\infty$, причем из формулы (1.39) следует, что $y_{acc} < \overset{(\infty)}{y}$. Изменение знака параметра μ по сравнению со случаем 1. приводит к тому, что наклон изоклины нуля (1.14) изменяется на отрицательный, и теперь при $\overset{(0)}{y} \to +\infty$ имеем $\overset{(0)}{x} \to -n/m + 0$. В остальном по сравнению со случаем 1 для интегральной кривой, отображающей асимптотику (1.36) в плоскость (x, y), ничего не изменяется. При отходе от особой точки $D(-n/m, +\infty)$ она попадает в те же указанные в пункте 1 особые точки. Таким образом, она как и ранее лежит в первом квадранте и не соединяется с интегральной кривой, соответствующей асимптотике (1.18), и особой точкой $B(0, \dfrac{1+\nu}{n})$, так как $(1+\nu)/n < 0$.

Для асимптотики (1.25) при заданных в самом начале пункта 2 условиях на параметр m становится существенно важным условие ее существования (1.24), а именно, его часть $m < \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^\sigma}$. Если это условие выполнено, то асимптотика (1.25) существует и соответствует концу процесса. Общий характер поля интегральных кривых сохраняется, таким образом, при

$$\frac{2}{\sigma}C_0^\sigma < m < \min(2\frac{\sigma+1}{\sigma}C_0^\sigma, \frac{1}{2}, \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^\sigma}).$$

Значения $\min(\cdot,\cdot,\cdot) = f_m(\nu,\sigma)$ легко получить подстановкой $\nu = 0, 1, 2$ и попарным сравнением аргументов $\min(\cdot,\cdot,\cdot)$. При этом оказывается, что в зависимости от ν и интервала изменения σ функция $f_m(\nu,\sigma)$ может принимать значения любого из аргументов $\min(\cdot,\cdot,\cdot)$.

В данных предположениях особая точка $A(-\dfrac{2}{\sigma}, -\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$ — узел.

Интегральная кривая, соответствующая в плоскости (x, y) семейству асимптотик (1.18) для начала процесса, выходит из особой точки $B(0, \dfrac{1+\nu}{n})$ по сепаратрисе с наклоном $K < 0$ определяемым формулой (1.22). Сравнивая его с наклоном изоклины нуля (1.14) в этой точке по формуле (1.23), имеем

$$\frac{d\overset{(o)}{y}}{dx}\Big|_{x=0} < K,$$

т.е. рассматриваемая интегральная кривая попадает в область с отрицательным наклоном поля интегральных кривых. Кроме того, для нее справедливо (следует из соотношений (1.19)) $x_{acc} \to -0$ при $\xi \to 0$, т.е. она выходит в $\underline{\overline{III}}$ квадрант. Далее она пересекает несколько раз (или, возможно, не пересекает ни одного раза) поочередно изоклины бесконечности и нуля, так как они имеют наклоны противоположные по знаку наклону поля интегральных кривых в соответствующих областях (см. фигуру), и затем входит в особую точку $A(-\dfrac{2}{\sigma}, -\dfrac{\sigma}{2}C_0^{-\sigma})$ вдоль одного из критических направлений.

Таким образом, решение в случае 2 при $\gamma > 0$ существует и (в силу единственности отхода по сепаратрисе от особой точки $B(0, \dfrac{1+\nu}{n})$)

единственно. Однако детально исследовать его свойства при вхождении в особую точку $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2}C_0^\sigma)$, соответствующую концу процесса, на основе анализа поля интегральных кривых в этой работе не удалось. В общем смысле точка $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2}C_0^\sigma)$ соответствует семейству асимптотик (1.25). Не удалось выяснить, какую именно степень $\lambda_1 - 2/\sigma$ или $\lambda_2 - 2/\sigma$ будет иметь поправочный член в асимптотике (1.25) и каков будет знак константы D.

Рассмотрим теперь случай $\gamma < 0$.

В терминах параметра m получим

$$\frac{2}{\sigma}C_0^\sigma < 2\frac{\sigma+1}{\sigma}C_0^\sigma < m < \frac{1}{2}.$$

Напомним, что это возможно лишь при $\nu = 2$. В данных условиях обе изоклины нуля (1.14) и бесконечности (1.16) имеют отрицательную производную.

Для интегральной кривой, отображающей в плоскости (x, y) семейство асимптотик (1.36), соответствующее концу процесса, здесь выполнено $x_{acc} \to -n/m + 0$, $y_{acc} \to +\infty$ (см. формулы (1.37)), а из формул (1.39) и (1.40) следует, что $\overset{(0)}{y} > \overset{(\infty)}{y} > y_{acc} > 0$. Кроме того, как и для значения $\gamma > 0$ при отходе по ξ от $+\infty$ рассматриваемая интегральная кривая выходит из особой точки $D(-n/m, +\infty)$ и попадает в особую точку $F(\frac{1}{1+\sigma}, 0)$ — узел. Таким образом, она целиком лежит в I квадранте и не соединима с особой точкой $B(0, \frac{1+\nu}{n})$, так как $(1+\nu)/n < 0$.

Для асимптотики (1.25) конца процесса как и при $\gamma > 0$ необходимо требовать выполнения условия $m < \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^\sigma}$. Область значений параметра m, при которых соблюдается это условие и условие $\gamma < 0$, появляется при $\sigma < 2/5$. Следовательно, рассматриваемый характер поля интегральных кривых сохраняется при

$$2\frac{\sigma+1}{\sigma}C_0^\sigma < m < \min\left(\frac{1}{2}, \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^\sigma}\right), \quad \sigma < 2/5.$$

Поведение интегральной кривой, отображающей асимптотику (1.18) начала процесса в плоскости (x, y), полностью совпадает вначале (при достаточно малых ξ) со случаем $\gamma > 0$. При движении по этой интегральной кривой с увеличением ξ возникает вопрос, по сути эквивалентный уже рассмотренному выше при $-(1+\nu) < \frac{n}{m} < -\frac{1+\nu}{1+\sigma}$. Изоклина бесконечности (1.16) при $\gamma < 0$ имеет отрицательный наклон как и расположенное под ней поле интегральных кривых, в котором находится исследуемая интегральная кривая. Таким образом, важно установить пересекает ли рассматриваемая интегральная кривая изоклину бесконечности (1.16).

Из анализа особых точек $H(\infty, s/m)$ и $L(\infty, s\dfrac{\sigma+1}{m})$ следует, что все интегральные кривые из области $x < -2/\sigma$, $y < \overset{(\infty)}{y}$ при уменьшении x пересекают сначала изоклину бесконечности, задаваемую формулой (1.16), а затем, и изоклину нуля (1.14), так как поле интегральных кривых под ней имеет положительный наклон, а сама изоклина нуля — отрицательный.

Таким образом, у интегральной кривой, выходящей по сепаратрисе из особой точки $B(0, \dfrac{1+\nu}{n})$, есть всего две возможности: либо она сразу попадает в особую точку $A(-\dfrac{2}{\sigma}, -\dfrac{\sigma}{2}C_0^{\sigma})$ вдоль одного из критических направлений, либо предварительно делает несколько «витков» (с последовательным пересечением изоклин нуля и бесконечности) вокруг этой точки. В любом случае здесь, как и при $\gamma > 0$, решение существует и единственно, но некоторые его детальные свойства при вхождении в особую точку A исследовать в данной работе не удалось.

Еще раз отметим, что если не существует асимптотика (1.25), то не существует и решения, так как уже было показано, что для $0 < m < 1/2$ асимптотики (1.18) и (1.36) лежат в разных квадрантах плоскости (x, y) и не соединяются.

в: Последняя оставшаяся возможность $1/2 < m$.

Асимптотика (1.18) соответствует началу процесса при $\xi \to 0$. Интегральная кривая отображающая ее в плоскости (x, y) выходит из особой точки $B(0, \dfrac{1+\nu}{n})$ по сепаратрисе с наклоном $K < 0$ (см. формулу (1.22)) в область, лежащую выше изоклины нуля (1.14) (см. формулу (1.23)). Эта область имеет отрицательный наклон поля направлений и ограничена снизу изоклинами нулей. Сначала — изоклиной (1.14) от точки $B(0, \dfrac{1+\nu}{n})$ до $C(1+\nu, 0)$, которая имеет отрицательную производную (т.е. рассматриваемая кривая не может ее пересечь), а затем — изоклиной (1.13) от точки $C(1+\nu, 0)$ до $(+\infty, 0)$. Таким образом, интегральная кривая, вышедшая из особой точки $B(0, \dfrac{1+\nu}{n})$ по сепаратрисе, с увеличением x монотонно убывает по y и уходит в точку $(+\infty, +0)$, т.е. целиком лежит в I квадранте.

Асимптотика (1.36) соответствует концу процесса при $\xi \to \infty$. В плоскость (x, y) она отображается интегральной кривой, которая входит в особую точку $D(-n/m, -\infty)$ (см. формулы (1.37)) и расположена в III квадранте, т.е. несоединима с асимптотикой (1.18) начала процесса.

Для асимптотики (1.25) нужно рассмотреть два случая. При поставленном условии $m > 1/2$ асимптотика (1.25) существует (см. формулы (1.24)), когда:

либо $\quad 1/2 < m < \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^\sigma}$,

либо $\quad 1/2 < \tilde{C}_0 + \sqrt{4C_0^\sigma} < m$.

Первый случай может осуществиться лишь при $0 < \sigma < 1 + \sqrt{2(1+\nu)}$, но он неинтересен, так как здесь из (1.25) легко видно $\lambda_{1,2} - 2/\sigma < 0$. Следовательно, асимптотика (1.25) существует при $\xi \to \infty$ и отвечает концу процесса. В плоскости (x, y) соответствующая ей интегральная кривая входит в особую точку $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2}C_0^\sigma)$, расположенную в III квадранте. Таким образом, она несоединима с асимптотикой (1.18) начала процесса, целиком лежащей в I квадранте.

Во втором случае из (1.25) получаем, что $\lambda_{1,2} - 2/\sigma > 0$, следовательно, асимптотика (1.25) существует при $\xi \to 0$ и соответствует началу процесса. Также нетрудно получить, что здесь всегда $\gamma > 0$. Для асимптотики (1.36) из формул (1.37) можно получить $x_{acc} \to -n/m - 0$, а из формул (1.39) и (1.40) имеем, что $y_{acc} > \overset{(\infty)}{y} > \overset{(0)}{y}$. Обе изоклины (1.14) и (1.16) имеют отрицательный наклон. Оба критических направления узла $A(-\frac{2}{\sigma}, -\frac{\sigma}{2}C_0^\sigma)$, исходя формулы (1.28) для $K_{1,2}$, имеют отрицательный наклон. Кроме того, вычитая из формул (1.30) и (1.31) выражение (1.33), легко получить что

$$K_{1,2} - \frac{d\overset{(\infty)}{y}}{dx}\bigg|_{x=-2/\sigma} = \frac{\sigma^2}{2}\left(\lambda_{1,2} - \frac{2}{\sigma}\right) > 0\,.$$

Сравнив дополнительно (1.32) и (1.33), получим окончательный результат характеризующий взаиморасположение изоклин (1.14) и (1.16) и критических направлений узла A при рассматриваемых значениях m:

$$\frac{d\overset{(0)}{y}}{dx}\bigg|_{x=-2/\sigma} < \frac{d\overset{(\infty)}{y}}{dx}\bigg|_{x=-2/\sigma} < K_- < K_+ < 0.$$

Рассмотрим теперь поведение интегральных кривых, выходящих из узла A. В особую точку $L(-\infty, s\frac{\sigma+1}{m})$ они попасть не могут, так как в нее входит единственная интегральная кривая $x = \infty$. В особую точку $H(-\infty, s/m)$ они также попасть не могут, так как H — седло. Его первая сепаратриса $x = \infty$. Для второй сепаратрисы из анализа этой особой точки (подробности см. [1–3]) следует, что она лежит в области с отрицательным наклоном поля направлений выше изоклины нуля (1.14), имеющей отрицательный наклон, следовательно, пересечь эту изоклину не может. Таким образом, рассматриваемая интегральная кривая, вышедшая из седла H по сепаратрисе, лежит в окрестности узла A выше интегральных кривых, выходящих из него, и попасть в него не может. Таким образом, все, кроме одной, интегральные кривые из узла A должны уйти в точку $(-0, -\infty)$. Эта единственная кривая (см. результаты анализа особой точки D), не попадающая в точку $(-0, -\infty)$, входит в особую точку $D(-n/m, -\infty)$ и представляет собой искомое решение.

3. Физические свойства и классификация решений.

Как легко показать из результатов асимптотического анализа при приближении времени к «начальному» моменту $t = -\infty$ решения стремятся к нулю во всех точках пространства. Поэтому их классификация проводится в соответствии с их асимптотическим поведением при $t \to -\infty$ (которое различно для различных типов решений) и по конечным состояниям, реализующимся вблизи момента обострения $t = 0$ (также различным для разных типов решений). Естественно, при этом используются результаты разд. 2 о существовании решений уравнения (1.12).

1. Режимы с обострением удобно классифицировать относительно известного решения в разделяющихся переменных, или *S-режима*:

$$T(\rho, t) = T_0 \left[2\left(1 + \nu + \frac{2}{\sigma}\right)\right]^{-1/\sigma} \left[\frac{\rho^2}{\rho_0^2(-t)}\right]^{1/\sigma}. \tag{3.1}$$

2. *HS-режим* реализуется для «начальных» данных, ограниченных *снизу* начальными данными *S-режима*:

а: при $-\infty < m < 0$ в окрестности $t = -\infty$ «начальные» данные (при $\rho \neq 0$) имеют вид

$$T(\rho, t)\Big|_{t\to-\infty} = T_0 C_0 \left[\frac{\rho^2}{\rho_0^2(-t)}\right]^{1/\sigma} \left[1 + D\left(\frac{\rho}{\rho_0(-t)^m}\right)^{\lambda_1 - 2/\sigma} + \cdots\right], \tag{3.2}$$

где значение константы C_0 дается формулой (1.17), а показателя степени $\lambda_1 - 2/\sigma$ — формулой (1.25) (знак «+»). Константа $D = D_+ > 0$ — некоторая положительная величина.

Конечная стадия процесса описывается асимптотикой (при $\rho \neq \infty$)

$$T(\rho,t)\Big|_{t\to -0} = CT_0(-t)^n \,[1-
-\frac{nC^{-\sigma}}{2(1+\nu)}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 (-t)^{-2m}+\cdots\Big] \to \infty, \quad \text{при} \quad t \to -0. \tag{3.3}$$

b: При $0 < m < 1/2$ в окрестности $t = -\infty$ «начальные» данные (при $\rho \neq \infty$) имеют вид

$$T(\rho,t)\Big|_{t\to -\infty} = CT_0(-t)^n \left[1 - \frac{nC^{-\sigma}}{2(1+\nu)}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 (-t)^{-2m}+\cdots\right]. \tag{3.4}$$

Конечная стадия процесса описывается асимптотикой (при $\rho \neq \infty$):

б.1) при $\mu \leq 0$

$$T(\rho,t)\Big|_{t\to -0} = T_0C_0\left[\frac{\rho^2}{\rho_0^2(-t)}\right]^{1/\sigma}\left[1 + D\left(\frac{\rho}{\rho_0(-t)^m}\right)^{\lambda_1-2/\sigma} + \cdots\right], \tag{3.5}$$

где константа $D = D_+ > 0$ — некоторая положительная величина.

б.2) При $\mu > 0$ решение существует при

$$\frac{2}{\sigma}C_0^\sigma < m < min\left(\frac{1}{2}, \tilde{C}_0 - \sqrt{4C_0^\sigma}\right),$$

асимптотика конца процесса

$$T(\rho,t)\Big|_{t\to -0} = T_0C_0\left[\frac{\rho^2}{\rho_0^2(-t)}\right]^{1/\sigma}\left[1 + D\left(\frac{\rho}{\rho_0(-t)^m}\right)^{\lambda_{1,2}-2/\sigma} + \cdots\right]. \tag{3.6}$$

В этом случае поле интегральных кривых детально проанализировать не удалось. На основе проведенного анализа не удается определить каков при заданном промежутке изменения параметра m порядок поправочного члена в асимптотике (1.25) $\lambda_1 - 2/\sigma$ или $\lambda_2 - 2/\sigma$, и каков знак D (т.е. сверху или снизу ограничивает данная асимптотика *S-режим* при приближении к моменту обострения). Однако вопрос о сравнении *S-режима* и рассматриваемого процесса при $t \to -0$ можно решить на основе теорем сравнения для параболических уравнений в частных производных по начальным данным. Начальные данные рассматриваемого процесса (при $t \to -\infty$) лежат по пространству выше *S-режима*, следовательно оканчиваться рассматриваемый процесс должен также, ограничивая *S-режим* сверху.

в: При $1/2 < m < +\infty$ решений типа *HS-режима* не существует.

Решения — монотонно растущие функции ρ и t, температура в точке $\rho = 0$ отлична от нуля при всех $t > -\infty$. Асимптотическое поведение *HS-режима* в окрестности момента обострения дается выражениями (3.3) и (3.5), т.е. *температура при* $t \to 0$ *обращается в бесконечность при всех* ρ (причем во все моменты времени решение для *HS-режима* мажорирует *S-режим*). Данное свойство является основным свойством *HS-режима.*

3. *LS-режим* имеет место в случае, если «начальные» данные ограничены *сверху* начальным распределением *S-режима.*

а) При $-\infty < m < 0$ в окрестности $t = -\infty$ «начальные» данные (при $\rho \neq 0$) имеют вид:

$$T(\rho,t)\Big|_{t\to-\infty} = T_0 C_0 \left[\frac{\rho^2}{\rho_0^2(-t)}\right]^{1/\sigma} \left[1 + D\left(\frac{\rho}{\rho_0(-t)^m}\right)^{\lambda_1 - 2/\sigma} + \cdots\right], \qquad (3.7)$$

где константа $D = D_- < 0$ — некоторая отрицательная величина.

Конечная стадия процесса описывается асимптотикой (при $\rho \neq \infty$)

$$T(\rho,t)\Big|_{t\to-0} = CT_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n/m} \left[1 - C^\sigma \gamma \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-1/m} (-t) + \cdots\right], \quad n/m > 2/\sigma\,. \qquad (3.8)$$

б) При $0 < m < 1/2$ решений типа *LS-режима* не существует.

в) При $1/2 < m < +\infty$ в окрестности $t = -\infty$ «начальные» данные (при $\rho \neq \infty$) имеют вид

$$T(\rho,t)\Big|_{t\to-\infty} = T_0 C_0 \left[\frac{\rho^2}{\rho_0^2(-t)}\right]^{1/\sigma} \left[1 + D\left(\frac{\rho}{\rho_0(-t)^m}\right)^{\lambda_{1,2} - 2/\sigma} + \cdots\right], \qquad (3.9)$$

и существуют при

$$\tilde{C}_0 + \sqrt{4C_0^\sigma} < m.$$

Но в этом случае поле интегральных кривых детально проанализировать не удалось. На основе проведенного анализа не удается определить каков, при заданном промежутке изменения параметра m, порядок поправочного члена в асимптотике (1.25): $\lambda_1 - 2/\sigma$ или $\lambda_2 - 2/\sigma$, и каков знак D (т.е. сверху или снизу ограничивает данная асимптотика *S-режим* при $t \to -\infty$). Однако вопрос о сравнении *S-режима* с началом рассматриваемого процесса можно решить на основе теорем сравнения для параболических уравнений в частных производных по конечным данным.

Конечная стадия процесса в этом случае описывается следующей асимптотикой:

$$T(\rho,t)\Big|_{t\to-0} = CT_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n/m}\left[1 - C^\sigma\gamma\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-1/m}(-t) + \cdots\right], \quad 0 < n/m < 2/\sigma\,. \tag{3.10}$$

На полученных решениях температура монотонно растет с ростом ρ и t. Решения во все моменты времени мажорируются *S-режимом*, в частности, температура в точке $\rho = 0$ равна нулю при всех t. Также как и в случае *S-режима* в *LS-режиме* для $\nu = 0$ имеет место *локализация тепла*. Еще одно важное свойство *LS-режима* — наличие *предельной кривой*, ограничивающей решение при всех t. Ее вид:

$$T_*(\rho) = CT_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n/m}\,, \tag{3.11}$$

следует из асимптотик (3.8) и (3.10) при $t \to -0$.

Отметим, что в режиме без обострения при $m > 1/2$, $0 < n/m < 2/\sigma$ с начальными данными вида (3.11) существует и единственно решение, конечной стадией которого является неограниченное возрастание температуры во всем пространстве. Следовательно, возможно решение, существующее для всего промежутка времени $-\infty < t < +\infty$. Отметим также, что некоторые вопросы, относящиеся к анализу близких проблем для уравнения (1.3) рассматривались в работах [8]–[12].

Классификация автомодельных решений задачи Коши с обострением качественно аналогична классификации граничных режимов с обострением в теплопроводных средах и режимов горения в средах с объемным энерговыделением [4]. На ее основе и с помощью теорем сравнения относительно несложно получить соответствующую классификацию решений в общей (неавтомодельной) задаче Коши для уравнения нелинейной теплопроводности.

Литература

1. *Васильев А.Н., Михайлов А.П.* Автомодельные решения задачи Коши для уравнения нелинейной теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т.38. № 5. С.788-800.

2. *Васильев А.Н., Михайлов А.П.* Автомодельная задача Коши для уравнения нелинейной теплопроводности (существование и свойства решений) - препринт № 4 М.: ИММ РАН, 1994.

3. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений М.: Наука, 1987.

4. *Васильев А.Н., Михайлов А.П.* Автомодельная задача Коши для уравнения нелинейной теплопроводности (постановка задачи и асимптотический анализ решений) - препринт № 3 М.: ИММ РАН, 1994.

5. *Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб., посвящ. 70-летию академика А.Ф.Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С.61-71.

6. *Баренблатт Г.И.* Об автомодельных решениях задачи Коши для нелинейного параболического уравнения нестационарной фильтрации газа в пористой среде // Прикл. матем. и иехан. 1956. Т.20. Вып.6. С.761-763.

7. *Демидов М.А., Михайлов А.П.* Эффекты локализации и образования структур при сжатии конечной массы газа в режиме с обострением // Прикл. матем. и механ. 1986. Т. 50 Вып. 1. С. 119-127.

8. *Калашников С.А.* Задача Коши в классе растущих функций для уравнений типа нестационарной фильтрации // Вестн. МГУ. Сер. матем. 1963. № 6. С.17-27.

9. *Benilan Ph., Crandall M.G.,Pierre M.* Solutions of the porous medium equation under optimal conditions on initial values // Indiana Univ. Math. J. 1984. V.33 № 1. P.51-87.

10. *Brezis H., Friedman A.* Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions // I.Math. pures et appl. 1983 T.62 № 1. P.73-97.

11. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1989. Вып. 14. С.3-44.

12. *Бокало Н.М.* Задача Фурье с нелокальными граничными условиями для одного класса нелинейных уравнений параболического типа // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1996. Вып. 19. С.26-36.